

Komentarz do zajęć z Analizy I

30 marca 2019

W tej notatce przedstawiamy rozwiązanie zadania piątego z I serii zadań domowych (zadanej na 12 III 2019 r).

Całość rozwiązania oprzemy na dwóch faktach pomocniczych. Po pierwsze, jeśli funkcja f spełnia założenia zadania, to jej pochodna ma pewną własność (oznaczoną gwiazdką). Po drugie, jeśli funkcja g ma własność $*$, to g' też ma własność $*$. Jeśli spełnione są oba lematy, dowodzi to tezy zadania, bo będziemy żądać, by funkcja o własności $*$ była w szczególności nieograniczona. Trudnością zadania jest poprawne sformułowanie tej własności, tak żeby rzeczywiście dziedziczyła ją pochodna.

Główny problem, który zauważyliśmy na dzisiejszych ćwiczeniach sprowadza się do tego: twierdzenie Lagrange'a pozwala mi kontrolować wartość pochodnej pomiędzy dwoma punktami. Jeśli więc założę np. że funkcja g ma nieskończenie wiele par argumentów, które są blisko siebie, a różnica ich wartości jest duża, pozwala mi to tylko wywnioskować, że jest nieskończenie wiele punktów, w których g' ma duży moduł, nie dowiemy się natomiast niczego o istnieniu par punktów, w których g' przyjmuje różne wartości.

Powiemy więc, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **ma własność $*$** jeśli f jest gładka i istnieje ϵ_0 takie, że:

- dla dowolnego dodatniego $\epsilon < \epsilon_0, 1$, dowolnych $\eta, M, N > 0$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$
- istnieją $x_0 < \dots < x_n$ takie, że $|x_i| > M$ oraz
- $\epsilon < |x_{i+1} - x_i| < 2\epsilon$ dla $i = 0, \dots, n$;
- $|f(x_0)| > N$;
- $|f(x_i)| < \eta$ dla $i > 0$.

Lemat 1. *Założmy, że g ma własność $*$. Wtedy g' ma własność $*$.*

Dowód. Niech ϵ_0 będzie stałą z definicji własności $*$ dla funkcji g . Ustalmy dowolne ϵ, η, M, N, n jak w sformułowaniu własności $*$. Znajdziemy $x_1, \dots, x_n$, które spełniają wszystkie warunki wypisane w tym sformułowaniu. Skoro g ma własność $*$, to istnieją $y_0 < \dots < y_{3n+1}$ takie, że:

- $|y_i| > M$ dla $i = 0, \dots, 3n+1$;
- $\frac{1}{2}\epsilon < |y_{i+1} - y_i| < \epsilon$ dla $i = 0, \dots, 3n+1$;
- $|g(y_0)| > N + \eta$;
- $|g(y_i)| < \frac{1}{4}\eta\epsilon$ dla $i > 0$.

Na mocy twierdzenia Lagrange'a istnieją $\xi_0, \dots, \xi_{3n}$ takie, że:

$$y_0 < \xi_0 < y_1 < \xi_1 < \dots < y_{3n} < \xi_{3n} < y_{3n+1}$$

oraz dla dowolnego $i = 0, \dots, 3n$ zachodzi równość:

$$g'(\xi_i) = \frac{g(y_{i+1}) - g(y_i)}{y_{i+1} - y_i}.$$

To oznacza, że:

$$\begin{aligned} |g'(\xi_0)| &= \left| \frac{g(y_0) - g(y_1)}{y_1 - y_0} \right| \\ &\geq \left| \frac{N + \eta - \eta}{\epsilon} \right| > N. \end{aligned}$$

Podobnie dla $i > 0$:

$$\begin{aligned} |g'(\xi_i)| &= \left| \frac{g(y_{i+1}) - g(y_i)}{y_{i+1} - y_i} \right| \\ &< \frac{2\frac{1}{4}\eta\epsilon}{\frac{\epsilon}{2}} = \eta. \end{aligned}$$

Wreszcie, jeśli wybierzemy liczby $x_0 = \xi_0, x_1 = \xi_3, x_2 = \xi_6 \dots, x_n = \xi_{3n}$, to będą dodatkowo spełnione nierówności

$$\epsilon < |x_{i+1} - x_i| < 2\epsilon.$$

(Formalnie wynika to z nierówności trójkąta, natomiast jeśli dla kogoś ostatnia nierówność nie jest jasna, warto narysować punkty ξ_i, y_i na prostej). $\square$

Lemat 2. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką i ma skończone granice w $+\infty$ oraz w $-\infty$. Jeśli f' nie jest ograniczona, to f' ma własność $*$.

Dowód. Ustalmy dowolne $\epsilon_0 < 1$ oraz ϵ, η, M, N, n jak w definicji własności *. Skoro f jest zbieżna w $+\infty$ i w $-\infty$, to istnieje takie M_1 , że dla dowolnych $x, y > M_1$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{4}\epsilon\eta.$$

Niech y_0 będzie dowolnym punktem takim, że $y_0 > M, M_1$ oraz

$$f'(y_0) > N.$$

Takie y_0 istnieje, bo f' nie jest ograniczona, ale jako funkcja ciągła jest ograniczona na każdym przedziale $[-A, A]$.

Niech teraz $y_i = y_0 + \frac{i}{2}\epsilon$ dla $i = 0, \dots, 3n+1$. Innymi słowy: bierzemy $3n+2$ liczb oddalonych od siebie o $\frac{1}{2}\epsilon$.

Na mocy twierdzenia Lagrange'a istnieją

$$y_0 = \xi_0 < y_1 < \xi_1 < y_2 < \dots < y_{3n} < \xi_{3n} < y_{3n+1}.$$

takie, że dla $i = 1, \dots, 3n$

$$\begin{aligned} |f'(\xi_i)| &= \frac{|f(y_{i+1}) - f(y_i)|}{y_{i+1} - y_i} \\ &\leq \frac{2\frac{\epsilon}{2}\eta}{\frac{\epsilon}{2}} \\ &= \eta. \end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio, wybierając $x_0 = \xi_0, x_1 = \xi_3, \dots, x_n = \xi_{3n}$ zapewnimy dodatkowo, że spełnione będą nierówności

$$\epsilon < |x_{i+1} - x_i| < 2\epsilon.$$

□