

Zadania domowe z Analizy I — VI seria

25 czerwca 2019

Pisemne rozwiązania zadań należy zostawić w mojej skrzynce najpóźniej 28 czerwca o 15. Wszystkie zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Zadanie 1. Wyznacz sumę szeregu

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots$$

Zadanie 2. Wyznacz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dx - \sin x}{x^3}.$$

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3 + \sin^4 x}} dx.$$

Zadanie 4. Niech $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ będzie takim ciągiem funkcji ciągłych nieujemnych, że dla dowolnego x ciąg liczbowy $f_n(x)$ jest rosnący i zbieżny do $f(x)$. Wykaż, że jeśli całka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna, to

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx.$$

(W szczególności całki po prawej stronie są zbieżne).

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ będzie funkcją nieujemną i ciągłą. Wykaż, że jeśli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

to całka $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ jest zbieżna. Zbadaj, czy zachodzi odwrotna implikacja.