

Zadania domowe z Analizy I — seria II

20 marca 2019

Pisemne rozwiązania zadań należy dostarczyć najpóźniej w trakcie zajęć z analizy 26 marca. Wszystkie zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Zadanie 1. Wyznacz granicę funkcji w zależności od parametru n :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x})^2 - \cos x}{(1 - e^x)^n}$$

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnego $x \in [0, 1]$ zachodzi nierówność

$$x \sin x \leq (e^x - 1)^2.$$

Zadanie 3. Wykaż, że nie istnieją $a_0, \dots, a_4 \in \mathbb{R}$ takie, że zachodzi równość:

$$a_4 \sin^4 + a_3 \sin^3 + a_2 \sin^2 + a_1 \sin + a_0 = \cos.$$

Zadanie 4. Załóżmy, że $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi i dla dowolnego $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$$|f^{(n)}(x)|, |g^{(n)}(x)| \leq 1.$$

Wykaż, że jeśli dla dowolnego n zachodzi równość $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, to $f = g$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką i zbieżną do skończonej granicy w $+\infty$. Przypuśćmy, że f' nie jest ograniczona. Udowodnij, że dla dowolnego n funkcja $f^{(n)}$ nie jest ograniczona.