

Zadania domowe z Analizy I — VI seria

14 czerwca 2019

Pisemne rozwiązania zadań należy zostawić w mojej skrzynce najpóźniej 19 czerwca o 14. Wszystkie zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Zadanie 1. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest okresowa i całkowalna w sensie Riemanna. Wykaż, że $\int_0^M f(x)dx$ jest zbieżna.

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru $\alpha > 0$ całka

$$\int_0^\infty (\arctan x - \frac{\pi}{2})^\alpha dx$$

jest zbieżna? Czy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2019} dx$ jest zbieżna?

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru $\alpha > 0$ całka

$$\int_0^\infty \sin x^\alpha dx$$

jest zbieżna?

Zadanie 4. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje skończona granica:

$$\int_{\sin x}^{e^x - 1} x^\alpha \cos x dx?$$

Zadanie 5. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 . Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$