

Zadania domowe z Analizy I — seria III

2 kwietnia 2019

Pisemne rozwiązania zadań należy dostarczyć najpóźniej w trakcie zajęć z analizy 12 kwietnia. Wszystkie zadania należy rozwiązywać samodzielnie.

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnych $x, y > 0$ zachodzi nierówność

$$\ln(1 + \sqrt[4]{x^4 + y^4}) \leq \ln(1 + x) + \ln(1 + y).$$

Zadanie 2. Załóżmy, że f jest funkcją wypukłą oraz ograniczoną z góry. Wykaż, że f jest stała.

Zadanie 3. Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ będą liczbami dodatnimi, których suma wynosi 1. Wykaż, że dla dowolnych $x_1, \dots, x_n > 0$ i dowolnych $1 < p \leq q$ zachodzi nierówność

$$(\lambda_1 x_1^p + \dots \lambda_n x_n^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\lambda_1 x_1^q + \dots \lambda_n x_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

(*Nota bene* nierówność zachodzi dla dowolnych $p \leq q$ i nie jest to dużo trudniejsze do pokazania).

Zadanie 4. Niech $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f_n(x) = \ln n \sin^n x \cos x.$$

Znajdź granicę f ciągu f_n . Zbadaj, czy $f_n \Rightarrow f$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla dowolnego n . Wykaż, że jeśli $f_n \Rightarrow f$ oraz wszystkie funkcje f_n są jednostajnie ciągłe, to f jest jednostajnie ciągła