

# Zadania na ćwiczenia z Analizy I

5 marca 2019

Poniższe zadania należy deklarować na zajęciach z Analizy Matematycznej I 8 i 11 marca. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty.

**Zadanie 1.** Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą. Udowodnij, że jeśli  $f$  różniczkowalna na zbiorze  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\}$  i  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = a$ , to  $f$  jest różniczkowalna w  $x_0$  i  $f'(x_0) = a$ .

**Zadanie 2.** Wykaż, że dla dowolnego  $x$  i dostatecznie dużych  $n$  ciąg  $a_n = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^n$  jest monotoniczny.

**Zadanie 3.** Wykaż, że jeśli  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna,  $f(0) = f(1) = 0$  oraz istnieje takie  $x_0$ , że  $f(x_0) = 1$ , to istnieje takie  $x_1$ , że  $f'(x_1) = 2$ .

**Zadanie 4.** Wykaż, że jeśli  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna,  $f(0) = f(1) = 0$ , to istnieje takie  $x_0$ , że  $f(x_0) + f'(x_0) = 0$ .