

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

2 kwietnia 2019

Poniższe zadania należy deklarować na zajęciach z Analizy Matematycznej I 5 i 9 kwietnia. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty.

Zadanie 1. Wyznacz granicę punktową ciągu funkcji $f_n : [1, M] \rightarrow \mathbb{R}$ danych wzorem

$$f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right).$$

Zbadaj, czy zbieżność jest jednostajna.

Zadanie 2. Definiujemy funkcję $\chi_{\mathbb{Q}}$ wzorem

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wykaż, że $\chi_{\mathbb{Q}}$ nie jest granicą zbieżnego punktowo ciągu funkcji ciągłych.

Zadanie 3. Wykaż, że istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która nie jest monotoniczna na żadnym przedziale.