

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

27 marca 2019

Poniższe zadania należy deklarować na zajęciach z Analizy Matematycznej I 29 marca i 2 kwietnia. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty.

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli $x, y, z > 1$, to

$$x^y y^z z^x \leq (xy + yz + zx)^{x+y+z}.$$

Zadanie 2. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, ma skończone granice przy x dążącym do $+\infty$ i $-\infty$ i f' jest nieograniczona. Wykaż, że istnieją takie ciągi $(x_n), (y_n)$, że dla dowolnego n zachodzą nierówności $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ oraz $|f'(x_n) - f'(y_n)| > n$.

Zadanie 3. Załóżmy, że $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i istnieją takie ciągi $(x_n), (y_n)$, że dla dowolnego n $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ oraz $|g(x_n) - g(y_n)| > n$. Wykaż, że istnieją takie ciągi $(u_n), (v_n)$, że dla dowolnego n zachodzą nierówności $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{n}$ oraz $|g'(u_n) - g'(v_n)| > n$.

Zadanie 4 (Przygotowanie do zadania o ciągłości pochodnej). Niech $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rodziną zbiorów domkniętych, $C_n \subset \mathbb{R}$ takich, że $\bigcup C_n = \mathbb{R}$. Udowodnij, że dla pewnego k zbiór C_k zawiera niepusty przedział otwarty.

Przypomnijmy, że zbiór C jest domknięty gdy dla dowolnego $x \in \mathbb{R} \setminus C_n$ istnieje przedział otwarty I taki, że $x \in I$ oraz I jest rozłączny z C_n .