

Zadania na ćwiczenia z Analizy I

15 marca 2019

Poniższe zadania należy deklarować na zajęciach z Analizy Matematycznej I 19 i 22 marca. Za każde zadanie można zdobyć punkt. W każdym tygodniu za rozwiązanie zadań można zdobyć trzy punkty.

Zadanie 1. Wyznacz wielomian Taylora z resztą w postaci Peana siódmego stopnia funkcji

$$\frac{e^x}{1-x}$$

w punkcie 0.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką (tzn. f ma w każdym punkcie pochodne wszystkich rzędów). Przypuśćmy, że $f(0) = 0$ i $f^2 - \cos$ nie ma ekstremum w 0. Udowodnij, że f też nie ma ekstremum w zerze.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b > 0$ zachodzi nierówność

$$a^b + b^a > 1.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{jeśli } x \geq 0 \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

jest gładka i wyznacz wszystkie wszystkie jej pochodne w zerze.