Topologia torusa

Wersja 16 styczeń 2013

Zadania z ♠ już są zrobione.

1) ♠Dowieść, że jeśli zwarta grupa G działa na przestrzeni Hausdorffa, to iloraz jest Hausdorffa.

2) ♠Sprawdzić, że sprzężenia torusa maksymalnego wypełniają grupę dla $G = U(n)$ lub $G = SO(n)$.

3) ♠Czy sprzężenia torusa zespolonego maksymalnego wypełniają grupę dla $G = GL(n)$ lub $= SL(n)$? Czy każdy element leży w jednoparametrowej podgrupie?

4) Sprawdzić, że $U(n)$ jest gęste w $GL(n)$ z topologią Zariskiego.

5) Sprawdzić, że $SO(n)$ jest gęste w $SO(n, \mathbf{C})$ z topologią Zariskiego.

6) Jakie są typy orbitowe działania dołączonego $SU(2)$ na algebrze Liego $\mathbf{su}(2)$?

7) ♠Jakie są typy orbitowe działania torusa maksymalnego w $U(4)$ na grassmannianie

$$G_2(\mathbf{C}^4) = U(4)/(U(2) \times U(2))?$$

8) ♠Niech X będzie G-przestrzenią, x_0 punktem stałym dziłania, $p : Y \to X$ nakryciem oraz $p(y_0) = x_0$. Skonstruować działanie G na Y z punktem stałym y_0.

9) Niech $E \to B$ będzie H wiązką główną. Wykazać, że $E \times_H G \to B$ jest G wiązką główną.

10) ♠Wykazać, że przekształcenie G-wiązek głównych nad wspólną bazą musi być izomorfizmem.

11) ♠Wykazać, że przekształcenie wiązek wektorowych nad wspólną bazą, które jest izomorfizmem na włóknach musi być izomorfizmem.

12) ♠Niech $E, F \to B$ będą G-wiązkami głównymi. Utożsamić G przekształcenia $E \to F$ zgodne nad B z przekrojami wiązki $(E \times_X F)/G \to B$, gdzie działanie G na produkcie jest diagonalne.

13) ♠Wykazać, że relacja $(\leq)$ zawierania z dokładnością do sprzeżenia dla podgrup zwartej grupy Lie jest relacją porządku częściowego.

14) Niech X ma tylko jeden typ orbitowy G/H. Wykazać, że $X \to X/G$ jest wiązką stowarzyszoną z pewna wiązką główną o grupie strukturalnej $N(H)/H$.

15) Niech X ma tylko jeden typ orbitowy G/H. Wykazać, że $X \simeq G \times_{N(H)} X^H$.

16) Niech X będzie łukowo spójna, G zwarta grupa Lie działa na X. Wykazać, że $H^1(X, \mathbf{Q}) \to H^1(X/G, \mathbf{Q})$ jest epimorfizmem.

17) Wykazać, że dla grupy dyskretnej $BG = K(G, 1)$.

18) ♠Wykazać, że dla grupy unitarnej $BU(n) = Grass_n(\mathbf{C}^\infty)$.

19) ♠Przyporządkowanie $G \mapsto BG$ jest funktorem *Grupy Lie* $\to hTop$.

20) Wykazać, że $H^*_G(X)$ nie zależy od modelu EG.

21) Ciąg dokładny grup $K \to G \to H$ indukuje rozwłóknienie $BK \hookrightarrow BG \twoheadrightarrow BH$.

22) ♠Niech $X_i = G^{i+1}$, $d^k : X_i \to X_{i-1}$ rzutowanie polegające na opuszczaniu k-tej składowej ($k = 0, 1, \dots i$). Realizację geometryczną definiujemy jako

$$|X_\bullet| = \left(\bigsqcup_{i \geq 0} X_i \times \Delta^i \right) / \sim$$

$$(d^k(a), b) \sim (a, \partial_k(b)) \qquad \text{dla } a \in X_i,\ b \in \Delta^{i-1}$$

gdzie $\partial_k : \Delta^{i-1} \hookrightarrow \Delta^i$ jest włożeniem k-tej ściany w sympleksie. Wykazać, że $|X_\bullet|$ jest ściągalna. Przedstawić $|X_\bullet|/G$ (iloraz przez działanie diagonalne) jako realizację geometryczną ciągu przestrzeni $Y_\bullet$.

23) Sprzężenie na grupie indukuje identyczność na $H^*(BG)$ (dla grupy niekoniecznie spójnej).

24) ♠Jeśli grupa ma torsję, to nie ma skończeniewymiarowego modelu.

25) ♠Dla grupy skończonej $H^*_G(X; \mathbf{Q}) \simeq H^*(X/G; \mathbf{Q})$

26) Dla grupy skończonej $H^*(X/G; \mathbf{Q}) \simeq H^*(X; \mathbf{Q})^G$.

27) Znaleźć przekształcenia klasyfikujące dla potęgi wiązki tautologicznej $(\gamma_n)^{\otimes k} \to \mathbf{P}^n$ (dla $k \in \mathbf{Z}$) przyjmując model $BC^* = \mathbf{P}^\infty$.

28) Opisać kohomologie przestrzeni flag F_n dla $n = 2, 3, 4$, podać wymiary w poszczególnych gradacjach, opisać odzorowania indukowane na kohomologiach pomiędzy tymi przestrzeniami, oraz indukowane z odwzorowań do $\mathbf{P}^{n-1}$ i do BT.

29) ♠Wykazać, że przy założeniach Tw. leray-Hirscha mamy opis kohomologii włókna $H^*(F) = H^*(E) \otimes_{H^*(B)} \mathbf{Z}$.

30) Obliczyć pierscień kohomologii grassmanianu $Gras_k(\mathbf{C}^n) = U(n)/(U(k) \times U(n-k))$.

31) ♠Rozłożyć przestrzeń flag F_n na $n!$ komórek.

32) ♠Opisać orbity działania Tr_n^+ i Tr_n^- na $Grass_k(\mathbf{C}^n)$.

33) ♠Udowodnić, że pierścień $S^{-1}H^*(BT; \mathbf{Q})$ jest płaski nad $H^*(BT; \mathbf{Q})$ dla dowolnego systemu multiplikatywnego.

34) Udowodnić, że teza Twierdzenia o lokalizacji zachodzi dla kohomologii o współczynnikach całkowitych, jeśli stabilizatory punktów są spójne.

35) ♠Opisać odwzorowania $H^*_T(X) \to H^*_T(X^T)$ dla $X = \mathbf{P}^n$ z działaniem liniowym torusa.

36) Jeśli X jest ekwiwariantnie formalna, skończonego wymiaru, zwarta, to $H^*(X) \simeq H^*(X^T)$ z zachowaniem gradacji modulo 2.

37) Wykazać, że mnożenie przez klasę z $H_1(T)$ zadaje operację $H_*(X) \to H_{*+1}(X)$ (lub $H^*(X) \to H^{*-1}(X)$) Jeśli X jest ekwiwariantnie formalna, to ta operacia jest zerowa. Podać przykład, gdy ta operacja jest zerowa, ale przestrzeń nie jest ekwiwariantnie formalna.

38) Przykład zastosowania: X rozmaitość algebraiczna rzutowa z działaniem $\mathbf{C}^*$, C krzywa z samoprzecięciem, która jest T-niezmiennicza, to C musi być zawarta w X^T.

39) ♠Obliczyć kohomologie $SO(n)$ modulo 2 torsja.

Odpowiedź: $H^*(S^3 \times S^7 \times S^{4m-1})$ gdy $n = 2n+1$ i $H^*(S^3 \times S^7 \times S^{4m-3} \times S^{2m-1})$ gdy $n = 2n$ modulo 2 torsja.
Wsk: $H^*(V_2(\mathbf{R}^n)) = H^*(S^{2n-3})$ dla n nieparzystych.

40) Niech $P^\bullet$ będzie przestrzenią z gradacją, z zerowymi parzystymi składnikami. Przypuśćmy, że mamy rozwłóknienie $F \to E \to B$ takie, że $H^*(F) = \Lambda P^\bullet$ oraz E jest ściągalne. Wykazać $H^*(B) = Sym(P^\bullet[-1])$.

41) Niech $T = \mathbf{C}^*$ oraz $\mathbf{P} = \mathbf{P}(V_0 \oplus V_1)$, gdzie V_0 ma trywiane działanie T, a V_1 działanie przez mnożenie skalarne. Obliczyć $c_{top}(N(\mathbf{P}^T))^{-1}$.

42) ♠Obliczyć $\int \alpha \in \mathbf{Z}$ w grassmanianie $Gras_2(\mathbf{C}^4)$, dla $\alpha = c_1(\gamma)^4,\ c_2(\gamma)c_1(\gamma)^2$, oraz całki dla $\alpha = c_2(\gamma)c_1(\gamma)^3,\ c_2(\gamma)^2 c_1(\gamma),\ c_1(\gamma)^5$, które należą do $H^2_T(pt)$.

43) ♠To samo polecenie dla grassmanianu Lagranżowskiego $LG(2)$ i dla $\alpha = c_1(\gamma)^3,\ c_1(\gamma)c_2(\gamma)$ oraz dla $\alpha = c_2(\gamma)c_1(\gamma)^2,\ c_1(\gamma)^4,\ c_2(\gamma)^2$.

44) Torus $T = (\mathbf{C}^*)^{n+1}$ działa na $\mathbf{P}^n$ naturalnie. Zapisać klasy dualne $[\mathbf{P}^k] \in H_T^{2(n-k)}(\mathbf{P}^n)$ za pomocą $1, h, h^2, \dots h^n$ i elementów $H^*_T(pt)$.

Problem: znaleźć stałe mnożenia $c^\nu_{\lambda\mu} \in H_T^{2(|\lambda|+|\mu|-|\nu|)}(pt)$

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \sigma_\nu$$

45) Wykazać $c^\nu_{\lambda\mu} = 0$ jesli $\lambda \not\subset \nu$ lub $\mu \not\subset \nu$

46) Wykazać: $c^\mu_{\lambda\mu} = \sigma_{\lambda|\mu}$

47) Formuła Monka-Pieri:

$$\sigma_{(1)} \cdot \sigma_\lambda = \sum \sigma_{\lambda^+} + \sigma_{(1)|\lambda} \cdot \sigma_\lambda,$$

gdzie λ^+ powstaje z λ przez dodanie jednego pudełka.

48) ♠Niech A będzie algebrą z gradacją, $F \in Der^i(A)$, $G \in Der^j(A)$. Spradzic, że $[F, G] \in Der^{i+j}(A)$.

49) ♠Wypisać aksjomaty dg-algebry Lie oraz dg-modułu i dg-algebry nad nad dg-algebrą Lie. Sprawdzić, że dla G-rozmaitości $\Omega^\bullet(M)$ jest dg-algebrą na dg-algebrą Lie $\mathbf{g}[\mathbf{1}] \oplus \mathbf{g}$.

50) ♠Niech G będzie zwartą spójną grupą Lie. Udowodnić, że
– $\Omega^\bullet(G)^G = \Lambda^\bullet \mathbf{g}^*$ (G działa na sobie przez lewe przesunięcia)
– $H^*(G) = (\Lambda^\bullet \mathbf{g}^*)^G$ (działanie dołączone)
– $(\Lambda^\bullet \mathbf{g}^*)^G = (\Lambda^\bullet \mathbf{g}^*)^{\mathbf{g}}$
– $(\Lambda^\bullet \mathbf{g}^*)^G = (\Lambda^\bullet \mathbf{t}^*)^W$
– $H^*(BG) = Sym^*(\mathbf{t}^*)^W$

51) Sprawdzić niezależność definicji skrętu Mathai-Quillena od wyboru bazy (punkt 13.5 wykładu).

52) Sprawdzić znaki w formułach 13.6 dla torusa jednowymiarowego i udowodnic je dla torusa 2-wymiarowego.