TOPOLOGIA DZIAŁANIA TORUSA

23.1.2013

1 Podstawy

1.1 Podstawowe pojęcia, stabilizatory, orbity, ilorazy

1.2 Odwzorowania ekwiwariantne, $Map(G/H, Y) = Y^H$

1.3 Typy orbitowe

1.4 Dla grupy zwartej odwzorowania działania $G \times X \to X$ i rzutowania $X \to X/G$ są domknięte

2 Konstrukcje i struktura G-przestrzeni

2.1 Konstrukcje ekwiwariantne
– skręcony produkt $X \times_G Y$
– indukowana przestrzeń $G \times_H X$
– produkty włókniste i przestrzeń indukowana $\begin{array}{ccc} f^*X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & f & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X/G \end{array}$

2.2 G-wiązki główne $E \to B = E/G$, kocykle definiujące wiązki

2.3 Każde przekształcenie G wiązek głównych nad ustaloną bazą jest izomorfizmem

2.4 Dane wiązki główne E i F nad $B \times I$. Jeśli $E_{|B\times\{0\}} \simeq F_{|B\times\{0\}}$, to $E \simeq F$
– dowód dla CW-kompleksów poprzez własność podnoszenia homotopii dla rozwłóknienia $\underline{Map}_G(E, F) \to B \times I$

2.5 Jeśli $f, g : B' \to B$ są homotopijne, to $f^*E \simeq g^*E$

2.6 Zbiór klas izomorfizmów G-wiązek jako funktor $hTop \to Set$, reprezentowalność

2.7 Lokalna struktura G-przestrzeni: tuby i slajsy - definicje

2.8 Każda G-ekwiwariantna wiązka wektorowa nad G/H jest postaci $G \times_H V \to G/H$ dla pewnej reprezentacji V grupy H.

2.9 Jeśli zwarta grupa Lie działa gładko na rozmaitości, to każda orbita ma slajs

Literatura: G. Bredon - Introduction to Compact Transformation Groups, roz I i II

3 Lokalna struktura, uniwersalne wiązki

3.1 Włókno retrakcji do orbity jest slajsem

3.2 Twierdzenie o istnieniu slajsa jest prawdziwe dla dowolnej (normalnej) G-przestrzeni. Dowód w oparciu o twierdzenie Chevalleya o zanurzaniu orbit i twierdzenie Tietza-Gleasona

3.3 Analog twierdzenia o slajsie w kategorii rozmaitości algebraicznych - twierdzenie Luny

3.4 Wnoisek: gdy G jest zwarta grupą Lie, działającą gądko na G-rozmaitośći to jest skończenie wiele typów orbitowych.
– dowód indukcyjny ze względu na wymiar.

3.5 Jeśli $S \subset X$ jest slajsem przez punkt x to $[x] \in X/G$ ma otoczenie homeomorficzne z S/G_x

3.6 Każda orbita Gx ma otoczenie U takie, że $G_y(\leq)G_x$ dla $y \in U$. (Relacja $(\leq)$ oznacza zawieranie z dokładnością do sprzeżenia.)

3.7 Jeśli zwarta grupa Lie G działa wolno na normalnej przestrzeni, to $X \to X/G$ jest wiązką główną

3.8 Twierdzenie Mostowa o ekwiwariantnym zanurzaniu w reprezentacje grupy G pod warunkiem, że G zwarta, X ma skończenie wiele typów orbitowych i jest metryczna skończonego wymiaru (tzn. daje się zanurzyć w $\mathbb{R}^n$).

3.9 W kategorii rozmaitości algebraicznych analogiczne twierdzenie o zanurzaniu w projektywizację reprezentacji dowiódł Sumihiro.

Uniwersalne G-wiązki główne

3.10 Jeśl $E \to B$ jest G wiązką główną, E jest przestrzenią ściągalną, to dla każdej G wiązki głównej $P \to K$ nad CW-kompleksem istnieje odwzorowanie $f : K \to B$ takie, że $f^*E = P$. Ponadto f jest jednoznaczne z dokładnością do homotopii.
– B reprezentuje funktor [*Klasy izomorfizmu G-wiązek nad ?*]
– typ homotopijny jest wyznaczony przez G, przestrzeń B jest oznaczana przez BG, a E przez EG

Literatura: Husemoller - Fibre Bundles

4 Przestrzenie Klasyfikujące i ekwiwariantne kohomologie 1.0

4.1 Każda domknięta podgrupa grupy liniowej $GL_n(\mathbb{C})$ dopuszcza model BG, który jest wstępującą sumą rozmaitości.

4.2 Każda zestolona podgrupa grupy liniowej $GL_n(\mathbb{C})$ dopuszcza model BG, który jest wstępującą sumą rozmaitości zespolonych.

4.3 Modele przestrzeni klasyfikującej:
– dla $T = (\mathbb{C}^*)^n$: $(\mathbb{P}^\infty)^n$ i $Gras_n^{split}(\mathbb{C}^\infty) = Stief_n(\mathbb{C}^\infty)/T$.
– częściowa przestrzeń flag $Gras_n^{filtr}(\mathbb{C}^\infty) = Stief_n(\mathbb{C}^\infty)/Tr$ jest modelem $B(Tr)$
– $BSO_n(\mathbb{C})$ jako wiązka nad grassmanianem

4.4 Dla ciągu dokładnego $K \to G \to H$ rozwłóknienie $BK \hookrightarrow BG \twoheadrightarrow BH$.

4.5 Dla podgrupy $K \subset G$ rozwłóknienie $G/K \hookrightarrow BK \twoheadrightarrow BG$

4.6 Jeśli grupa Lie zawiera torus, to przestrzeń klasyfikująca jest nieskończonego wymiaru.

4.7 Kohomologie nieskończonego grassmanianu $H^*(BU_n; \mathbb{Z}) = H^*(BT; \mathbb{Z})^{\Sigma_n} = \mathbb{Z}[c_1, c_2 \ldots, c_n]$, gdzie $c_i = \sigma_i(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

4.8 Uogólnienie dla dowolnej grupy zwartej, kohomologie o współczynnikach w $\mathbb{Q}$:

$$H^*(BG; \mathbb{Q}) = H^*(BT; \mathbb{Q})^W,$$

gdzie $W = NT/T$ jest grupą Weyla.

Ekwiwariantne kohomologie

4.9 Jeśli G działa wolno na X (oraz $X \to X/G$ jest wiązką główną) to $H_G^*(X) := H^*(X/G)$

4.10 Każda G-przestrzeń X jest homotopijnie równoważna wolnej G przestrzeni $EG \times X$
– $H_G^*(X) := H^*((EG \times X)/G) = H^*(EG \times_G X)$
– jeśli $X \to Y$ jest homotopijną równoważnością, to indukuje izomorfizm ekwiwariantnych kohomologii.

4.11 Rozwłóknienie $X \hookrightarrow EG \times_G X \twoheadrightarrow BG$.
– $H_G^*(X)$ jest algebrą nad $H^*(BG) = H_G^*(pt)$

4.12 Włókno nad $[x]$ odwzorowania $EG \times_G X \to X/G$ jest równe $EG/G_x = BG_x$.

5 Kohomologie $BGL_n(\mathbb{C})$ i przestrzenie flag

5.1 Gdy G spójna grupa Lie, K maksymalna zwarta podgrupa, wtedy $BK \to BG$ jest homotopijną równoważnością (bo $G/K \simeq \mathbb{R}^n$ z rozkładu $G = KAN$)
– $B(S^1)^n \simeq B(\mathbb{C}^*)^n \simeq B(Tr)$, gdzie Tr oznacza grupę macierzy górnotrójkątnych w $GL_n(\mathbb{C})$
– $BU(n) = BSp_n(\mathbb{R})$, gdzie $Sp_n(\mathbb{R}) \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$ jest podgrupą macierzy symplektycznych.

5.2 Kohomologie BT:
– przedstawienie $T = (\mathbb{C}^*)^n$ zadaje izomorfizm $H^*(BT;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]$
– przedstawienie niezmiennicze $H^*(BT;\mathbb{Z}) = \bigoplus_{d\geq 0} Sym^d(T^\vee)$
– lub jako wielomiany na algebrze Lie $H^*(BT;\mathbb{C}) = \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$.

5.3 Pierwsza klasa Cherna wiązek liniowych poprzez urożsamienie

$$[X, B\mathbb{C}^*] = [X, K(\mathbb{Z}, 2)] = H^2(X;\mathbb{Z}).$$

5.4 Kohomologie $BGL_n(\mathbb{C})$ jako pierścień wielomianów od $c_i = c_i(\gamma^*)$, gdzie γ jest wiązką uniwersalną na grassmannianie:
1. kohomologie rozmaitości flag $F_n = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n\}$ są generowane przez pierwsze klasy Cherna wiązek liniowych V_i/V_{i-1} (dowód indukcyjny z tw Leray-Hirscha dla $F_{n-1} \subset F_n \to$ $\to \mathbb{P}^{n-1}$).
2. z rozwłóknienia $F_n \subset BT \twoheadrightarrow BGL_n$ i tw. L-H mamy

$$H^*(BT) \simeq H^*(BGL_n) \otimes H^*(F_n).$$

Stąd $H^*(BGL_n) \to H^*(BT)$ jest mono.
3. obraz $H^*(BGL_n)$ leży w $H^*(BT)^{\Sigma_n} \simeq \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]^{\Sigma_n}$
4. liczenie wymiarów daje izomorfizm. Funkcji symetrycznej σ_i odpowiada c_i

5.5 Klasy charakterystyczne wiązek poprzez Lemat Yonedy.

5.6 Jeśli wiązka E ma przekrój niezerujący się nigdzie, to $c_{top}(E) = 0$ (z konstrukcji izomorfizmu).

5.7 $H^*(F_n) = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]/(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

Literatura o klasach Cherna i inne obliczenie kohomologii nieskonczonego grassmanianu: Milnor-Stashef, Characteristic classes.

6 Ekwiwariantne kohomologie 2.0

6.1 Aproksymacja: jeśli $E \to B$ jest wiązką główną, $\tilde{H}^k(E) = 0$ dla $k \leq N$, to $H^k_G(X) = H^k(E \times_G X)$ dla $k < N$.
– dowód z lematu: Jeśli $F \hookrightarrow A \twoheadrightarrow B$ jest rozwłóknieniem, $\tilde{H}^k(F) = 0$ dla $k \leq N$, to $H^k(A) = H^k(B)$ dla $k < N$. Stosujemy dla $A = (E \times EG) \times_G X$ i $B = E \times_G X$ oraz dla $B' = EG \times_G X$

6.2 Obliczenie $H^*_T(\mathbb{P}(V))$ dla reprezentacji $T \to GL(V)$.
– twierdzenie Leray-Hirscha
– formuła rzutowa Grothendiecka: dla rozszczepialnej wiązli wektorowej $L_1 \oplus \cdots \oplus L_n = E \to B$ spełniona jest relacja $\prod(x + c_1(L_i)) = 0 \in H^*(\mathbb{P}(E))$, gdzie $x = c_1(\mathcal{O}(1))$, a $\mathcal{O}(1)$ jest sprzężoną wiązka tautologiczną nad $\mathbb{P}(E)$. (Dow. $\mathcal{O}(1) \otimes p^*(E) = Hom(\mathcal{O}(-1), p^*(E))$ ma przekrój, więc klasa c_n znika.)

6.3 Lemat: $C \subset A \twoheadrightarrow B$ lokalnie trywialne rozwłóknienie algebraicznych rozmaitości, C zwarte, $\mathbb{K}$ ciało, to $H^*(A;\mathbb{K}) = H^*(B;\mathbb{K}) \otimes H^*(C;\mathbb{K})$ jako $H^*(C;\mathbb{K})$-moduł.
– dowód z tw. Leray-Hirscha: konstrukcja korespondencji $Z \subset A \times C$ zadającej transformację $\Phi : H^*(C) \to H^*(A)$, takiej, że dla otwartego zbioru $U \subset B$ nad którym wiązka jest trywialna złożenie $H^*(C) \to H^*(A) \to H^*(p^{-1}(U)) = H^*(U \times C)$ jest indukowane przez rzutownie na C.

Ekwiwariantna Formalność

6.4 Jeśli $G = (\mathbb{C}^*)^n$ lub $GL_n(\mathbb{C})$ działa algebraicznie na zwartej, gładkiej rozmaitości algebraicznej, to dla dowolnego ciała $\mathbb{K}$ kohomologie ekwiwariantne są wolnym $H^*(BG;\mathbb{K})$ modułem $H^*_G(X;\mathbb{K}) \simeq H^*(BG;\mathbb{K}) \otimes H^*(X;\mathbb{K})$ jako $H^*(BG;\mathbb{K})$ moduł
– $H^*(X;\mathbb{K}) = H^*_G(X;\mathbb{K}) \otimes_{H^*(BG;\mathbb{K})} \mathbb{K}$
– dowód działa dla grup, dla których $EG \to BG$ aproksymować można przez wiązki Zariski-lokalnie trywialne; np $Sp_n(\mathbb{C})$.
– dla $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ uogólnienie dla dowolnej liniowej spójnej grupy algebraicznej.

Literatura: Fulton (notatki Andersona), Wykład 2
O krespondencjach: Fulton, Intersection theory, §16

7 Formalne własności ekwiwariantnych kohomologii

7.1 – $f : X \to Y$, $\phi; G \to H$ t.ż: $f(g.x) = \phi(g).f(x)$ indukuje $H^*_H(Y) \to H^*_G(X)$
– dla $Y = X$, $f(x) = g_0.x$, $\phi(g) = g_0^{-1} g g_0$ przekształcenie indukowane jest identycznością.
– $H^*_G(G \times_H X) = H^*_H(X)$ dla H-przestrzeni,
– w szczególności $H^*_G(G/H) = H^*_H(pt) = H^*(BH)$ (zamiast aksjomatu współczynników)
– Mayer-Vietoris
– jeśli ekwiwariantne przekształcenie $f : X \to Y$ indukuje izomorfizm na $H^*(-)$, to indukuje izomorfizm na $H^*_G(-)$

7.2 Klasy charakterystyczne dla ekwiwariantnych wiązek wektorowych.

7.3 Dla właściwego odwzorowania $X \to Y$ G-rozmaitości funktorialny homomorfizm Gysina $f_* : H^*_G(X) \to H^{*+r}_G(Y)$, gdzie $r = \dim Y - \dim X$
– formulą projekcji dla $a \in H^*_G(X)$, $b \in H^*_G(Y)$:

$$f_*(f^*b.a) = b.f_*(a).$$

– dla produktu włóknistego, gdzie f lub g jest rozwóknieniem

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array} \qquad g^*f_* = f'_*g'^*$$

– dla $X \subset Y$, to f^*f_* jest mnożeniem przez ekwiwariantną klasę Eulera wiązki normalnej.
– klasa fundamentalna $[V]$ dla ekwiwariantnej podrozmaitości $V \subset X$ w grupie $H_G^{codim(V)}(X)$.
Jeśli $f(V) = W$, to $f_*([V]) = d[W]$, gdzie d jest stopniem odwzorowania $V \to W$.
– $p \in V \cap X^T$, $f : \{p\} \to X$, to $f^*[v] = e(N(p))$

Lokalizacja

7.4 Twierdzenie o lokalizacji: X zwarta przestrzeń skończonego wymiaru, na której działa torus. Niech $S \subset H^*(BT) = Sym^*(\mathfrak{t}^*)$ system multiplikatywny zawierający anihilatory algebr Lie nietrywialnych grup izotropii T_x. Wtedy

$$S^{-1}H_T^*(X;\mathbb{Q}) \to S^{-1}H_T^*(X^T;\mathbb{Q})$$

jest izomorfizmem.
(Dowód przy pewnych założeniach o regularności przestrzeni X.)

7.5 Lemat: pierścień $S^{-1}H^*(BT;\mathbb{Q})$ jest płaski nad $H^*(BT;\mathbb{Q})$.

7.6 Krok 1: $Y \subset X$ para T-przestrzeni, Y domknięty, T działa wolno na $X \setminus Y$, $S = \langle T^\vee - \{0\}\rangle$, wtedy $S^{-1}H_T^*(X,Y) = 0$.
Dowód, gdy (*) Y ma otoczenie V, homotopijnie z nim równoważne

7.7 Krok 2: $T_1 \to T_2$ nakrycie, to $H_{T_2}^*(X,Y;\mathbb{Q}) \to H_{T_1}^*(X,Y;\mathbb{Q})$ izomorfizm.

7.8 Krok 3: punkty z $X \setminus Y$ mają taki sam typ orbitowy T/T_x, $S \supset \langle anh(\mathfrak{t})_x\rangle$, wtedy $S^{-1}H_T^*(X,Y;\mathbb{Q}) = 0$

7.9 Krok 4: Zakładamy, że X ma filtrację zbiorami domkniętymi $X^T = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X$ spełniającą (*) oraz punkty w różnicy $X_i \setminus X_{i-1}$ mają taki sam typ orbitowy. (Np X jest rozmaitością.) Stosujemy ciąg dokładny pary *Longrightarrow* teza tweierdzenia.

Literatura:

Quillen, The Spectrum of an Equivariant Cohomology Ring: I , Ann. Math. Vol. 94, 1971, pp. 549-572
Fulton (notatki Andersona), Wykład 4
Eddidin-Graham

8 Twierdzenie o lokalizacji cd

8.1 Przykład: $X = \mathbb{P}(L_a \oplus L_b)$, wtedy $H^*_T(X) \to H^*_T(X^T)$ jest mono
– obraz składa się z par $(x, y) \in H^*_T(X^T) = H^*_T(pt) \oplus H^*_T(pt)$, takich, że $(a-b)|(x-y)$;
– kojądro jest torsyjne.

8.2 Dowód płaskości $S^{-1}R$ dla dowolnego pierscienia i systemu multiplikatywnego.

Uwagi do dowodu twierdzenia o lokalizacji:

8.3 Jeśli $X^T \subset Y$, to $S^{-1}H^*_T(X) \to S^{-1}H^*_T(Y)$ jest izo, gdzie S generowany przez $Anh(\mathfrak{t}_x) - \{0\}$ dla $x \in X \setminus Y$.

8.4 Izomorfizm Thoma i klasa Eulera.

8.5 Jeśli X jest rozmaitością, a działanie gładkie, to dla podgrupy $G \subset T$ zbiór $X_{(G)}$ jest podrozmaitośćią. Rozkładając X na typy orbitowe indukcjnie dowodzimy, że $i_* : S^{-1}H^*_T(X^T) \to S^{-1}H^*_T(X)$ jest izo

8.6 Jeśli rzędy $|\pi_0(T_x)|$ dzielą liczbę d, to teza twierdzenia prawdziwa dla współczynników w $\mathbb{Z}[1/d]$;

Konstrukcja odwzorowania odwrotnego $S^{-1}H^*_T(X^T) \to S^{-1}H^*_T(X)$

8.7 Dla podrozmaitości $i : Y \hookrightarrow X$ odwzorowanie $i^*i_* : H^*(Y) \to H^*(Y)$ jest mnożeniem przez klasę Eulera wiązki normalnej $e(NY)$.

8.8 Jeśli X z trywialnym działaniem T, to każda ekwiwariantna wiązka rozpada się na sumę podwiązek$E = \bigoplus_{w \in T^\vee} E_w$, gdzie T działa na E_w poprzez charakter w

8.9 Jeśli X z trywialnym działaniem T, $\dim X < \infty$, E ekwiwariantna wiązka, $E^T = 0$, to $e(E)$ odwracalna w $S^{-1}H^*_T(X) = S^{-1}H^*_T(pt) \otimes H^*(X)$, gdzie S generowane przez charaktery E.
Dowód: można założyć, że w E występuje jeden charakter w. Istnieje wiązka dopełniająca F, taka, że $E \oplus F = (\mathbb{1}_w)^N$. Wtedy $e(E)e(F) = w^N$.

8.10 Twierdzenie o lokalizacji Atiyah-Bott $x = \sum_\alpha (i_\alpha)_* \left(\frac{i^*_\alpha(x)}{e(NY_\alpha)}\right)$, gdzie $X^T = \bigsqcup F_\alpha$, a $i_\alpha : F_\alpha \to X$ jest włożeniem.
Dowód: $i^*i_* : S^{-1}H^*(X^T) \to S^{-1}H^*(X) \xrightarrow{\simeq} S^{-1}H^*(X^T)$ jest mnożeniem przez odwracalny element $\bigoplus e(N(F_\alpha))$.

Literatura:

Atiyah-Bott

Eddidin-Graham

Fulton §5

9 Lokalizacja c.d.

Oznaczenie: $\Lambda := H_T^*(pt) \simeq \mathbb{Q}[t_1, t_2, \ldots, t_r]$

9.1 Inne sformułowanie tw o lokalizacji: ker i coker odwzorowania $H^T(X) \to H_T^*(X^T)$ są torsyjnymi Λ-modułami.

9.2 Formuła całkowa Berline-Vergne. Gdy M^T jest dyskretny, to

$$\int_M a = \sum_{p \in M^T} \frac{a_{|p}}{e_p},$$

gdzie e_p jest iloczynem wag reprezentacji stycznej.

9.3 Obliczenia $\int_{\mathbb{P}^n} c_1(\gamma)^{n+k}$

9.4 Warunki na ekwiwariantna formalność (współczynniki kohomologii w $\mathbb{Q}$)
– Ciąg spektralny $E_2^{pq} = \Lambda \otimes H^q(X) \Rightarrow H_T^{p+q}(X)$ degeneruje się,
– $H_T^{p+q}(X) \to H^{p+q}(X)$ jest „na”,
– $H_T^*(X) = \Lambda \otimes H^*(X)$ jako Λ-moduł,
– $H_T^*(X) = \Lambda \otimes H^*(X)$ jako przestrzeń wektorowa z gradacją,
– $H_T^*(X) \otimes_\Lambda \mathbb{Q} = H^{p+q}(X)$.

9.5 GKM-przestrzenie (przestrzenie bąbelkowe):
1. działanie $T = (\mathbb{C}^*)^r$, które jest ekwiwariantnie formalne,
2. X^T jest dyskretny,
3. orbity jednowymaiarowe (są izomorficzne z $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$) jest ich skończenie wiele,
4. w każdym punkcie stałym charaktery nie są proporcjonalne.
4'. jeśli założyć, że X jest rozmaotością, to $3 \Rightarrow 4$.

9.6 Twierdzenie: X przestrzeń bąbelkowa, wtedy następujący ciąg jest dokładny:

$$0 \longrightarrow H_T^*(X) \longrightarrow H_T^*(X^T) \xrightarrow{\delta} H_T^{*+1}(X_1, X^T) \simeq \bigoplus_{\text{1-wymiarowe orbity } \mathcal{O}} H_T^*(\mathcal{O}),$$

gdzie X_1 jest sumą orbit 1- i 0-wymiarowych, δ jest różniczką w długim ciągu pary (X_1, X^T).

Literatura:

Fulton §5

Goresky-Kottwitz-MacPherson

Guillemin-Sternberg §10-11

10 GKM-graf, kohomologie grassmanianu

10.1 Gdy $X = \mathbb{P}^1$ z działaniem T przez charakter χ, wtedy

$$H_T^{*+1}(\mathbb{P}^1, \{0,\infty\}) \simeq H_T^*(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty\} = \Lambda/(\chi).$$

10.2 Przeformułowanie: GKM graf i układ elementów $(u_p) \in \bigoplus_{p\in X^T}\Lambda$ zadają klasę w $H_T^*(X)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej krawędzi α łączącej p z q charakter χ_α dzieli $u_p - u_q$. Tzn następujący ciąg jest dokładny:

$$0 \longrightarrow H_T^*(X) \longrightarrow \bigoplus_{p\in X^T}\Lambda \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{\text{1-wymiarowe orbity } \mathcal{O}} \Lambda/(\chi_{\mathcal{O}}),$$

gdzie $\delta((u_p))_{\mathcal{O}} = u_p - u_q mod \chi_O$ gdy $p, q \in \overline{\mathcal{O}}$.
Dowód: dla każdego charakteru χ suma orbit z charakterem proporcjonalnym do χ jest równa X^{T_χ}, gdzie $T_\chi = ker(\chi)$. Element spełniający GKM rozszerza się do klasy w $H_T^*(X^{T_\chi})$. zatem w przedstawieniu $a \in S^{-1}H_T^*(X)$ można uniknąc mianowników podzielnych przez χ. Z własności arytmetycznych Λ wynika, że $a \in H_T^*(X)$.
(*) Jeśli $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ są różne charaktery, to $\bigcap \Lambda_{S_i} = \Lambda$, gdzie $\Lambda_{S_i} \subset (\Lambda)$ jest lokalizacją ze wzgleędu na system multiplikatywny generowany przez χ_j, $j \neq i$.. To samo zachodzi dla modułu Λ^n.

10.3 Przykład: GKM graf dla grasmanianu

Klasa Segre i odpowiadające jej funkcja symetryczna

10.4 Definicja: $s_k(E) = c_k(-E^*)$, tzn $s(E) = (c(E^*))^{-1}$ pochodzi od funkcji symetrycznej $h_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{I=(i_1,\dots,i_n),|I|=k} x^I$.

10.5 Własnosci (aksjomatycznie)

10.6 Wzór $h_n = det(e_{1+j-i})_{1\le i,j\le k}$, gdzie e_i – elementarna funkcja symetryczna (Jacobi-Trudi)

Dowód: $det \begin{pmatrix} 1 & e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} & e_n \\ 1 & e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} & e_n \\ 0 & 1 & e_1 & \dots & e_{n-2} & e_{n-1} \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & e_1 \end{pmatrix} = 0$

10.7 Wzór jako iloraz uogólnionych wyznaczników Vandermonda $V_{k+n-1,n-2,\dots,1,0}/V_{n-1,n-2,\dots,1,0}$. Dowód z rozwinięcia Laplace'a i twierdzenia o reziduach.

Kohomologie grassmanianu $H^*(Gras_k(\mathbb{C}^n)$

$\ell = n - k$, wiązka tautologiczna oznaczana tu za Fultonem przez S, ilorazowa przez Q

10.8 $H^*(Gras_k(\mathbb{C}^n)) = \mathbb{Z}[e_1, \dots e_\ell]/(h_j | j > k)$, gdzie $e_i = c_i(Q) = s_i(S^*)$, $h_j = s_i(Q) = c_j(S^*)$

10.9 Baza addytywna $\sigma_\lambda = [\Omega_\lambda(F_\bullet)]$ dla $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k)$, t.ż. $\lambda_1 \leq \ell$ (podział)

$$\Omega_\lambda(F_\bullet) = \{W : \dim(W \cap F_{\ell+i-\lambda_i} \geq i\}$$

$codim(\Omega_\lambda(F_\bullet)) = i$

10.10 Formuła Pieri $\sigma_{(1^k)}\sigma_\lambda = \sum \sigma_\mu$, gdzie μ jest otrzymane z λ przez dorzucenie k pudełek, ale żadne dwa nowe nie są w jednym rzędzie.

Literatura

Fulton §6, i książka Young tableaux

MacDonald - Symmetric Functions and Hall polynomials

Griffiths-Harris - Principles of algebraic geometry Ch I §5

11 Ekwiwariantny rachunek Schuberta

11.1 Dualność Poincaré $\lambda^* = (\ell - \lambda_k, \ldots, \ell - \lambda_1)$

$$\Omega_\lambda(F_\bullet) \cdot \Omega_\lambda(F_\bullet^{op}) = \{lin(\epsilon_{\ell+i-\lambda_i}).\}$$

11.2 Dodatniość: klasa a jest nieujemną kombinacją klas Schuberta wtedi i tylko wtedy, gdy dla każdej klasy σ_λ iloczyn $a \cdot \sigma_\lambda = \int_{Gras_k(\mathbb{C}^n)} a \cup \sigma_\lambda \geq 0$.
– każda klasa kohomologii reprezentowana przez cykl algebraiczny jest dodatnia (dowód z tw Kleinmana o położeniu ogólnym dla rozmaitości jednorodnych)

11.3 Formuła Giambelli

$$[\Omega_\lambda(F_\bullet)] = det(c_{\lambda_i+j-i})_{1\leq i,j\leq k},$$

gdzie $c_i = c_i(Q) = s_i(S^*)$.
- wielomiany $S_\lambda = det(s_{\lambda_i+j-i})_{1\leq i,j\leq k}$ jako wielomiany symetryczne od pierwiastków Cherna wiązki S^* są równe

$$V_{k-1+\lambda_1,k-2+\lambda_2,\ldots,\lambda_k}/V_{k-1,k-2,\ldots,0},$$

gdzie $V_{a_1,a_2,\ldots,a_k} = det(x_i^{a_j})_{1\leq i,j\leq k}$

11.4 Dla wiązki wektorowej $E \to B$, $\dim(E) = n$ wiązka grassmanianów: z Leray-Hirscha $H^*(Gras_k(E))$ jest wolnym modułem nad $H^*(B)$

$$H^*(Gras_k(E)) = H^*(B)[c_1, \ldots c_\ell]/\sim$$

$c_i = c_i(Q)$, relacje pochodzą od $s_j(Q - E) = c_j(S^*) = 0$ dla $j > k$.

11.5 Jeśli E ma filtrację $F_\bullet$, to definiujemy klasy σ_λ, to jest baza addytywna $H^*(B)$-modułu $H^*(Gras_k(E))$.

11.6 Formuła Kempfa-Laksova

$$\sigma_\lambda = det(c_{\lambda_i+j-i}(i))_{1\le i,j\le k},$$

gdzie $c_\bullet(i) = c_\bullet(Q - F_{\ell+i-\lambda_i}) = c_\bullet(E/F_{\ell+i-\lambda_i} - S) = s_\bullet(S^* - (E/F_{\ell+i-\lambda_i})^*)$.
(dow. $c_\bullet(Q-F) = c_\bullet(Q-E+E-F) = c_\bullet(-S+E/F) = s_\bullet(S^* - (E/F)^*)$)

11.7 Związek ,,miejsca degeneracji morfizmu wiązek" z klasami Cherna. Jesli $\dim(A) \le \dim(B)$ to

$$[deg.loc(A \to B)] = c_{\dim(B)-\dim(A)+1}(B - A)$$

n.p.

$$[deg.loc(\mathbb{C}^\alpha \to B)] = \text{przeskoda do istnienia } \alpha\text{-reperu w } B = c_{\dim(B)-\alpha+1}(B).$$

11.8 Dowód tw Kempfa-Laksova (część geometryczna): indukcja ze względu na długość λ. Jeśli $\lambda = (a, 0, \ldots, 0)$ to

$$\Omega_\lambda = \{W : \dim(W \cap F_{\ell+1-a} \ge 1\} = deg.loc(F_{\ell+1-a} \to Q).$$

Wtedy

$$\sigma_\lambda = c_\lambda(Q - F_{\ell+1-a})$$

Krok indukcyjny - częściowa przestrzeń flag jest wiązką nad $\mathbb{P}(E)$

$$p : Fl_{k,1}(E) = Gras_{k-1}(E/taut) \longrightarrow \mathbb{P}(E)\,.$$

Obcinamy ją do $\mathbb{P}(F_{\ell+1-\lambda_1})$ i definiujemy

$$\widetilde{\Omega}_\lambda = \{L \subset W : (\dim(W \cap F_{\ell+i-\lambda_i}) \ge i\,)\ \&\ L \subset W \cap F_{\ell+1-\lambda_1}\} = \Omega_{\lambda\setminus\lambda_1}(F_\bullet/taut) \subset p^{-1}(\mathbb{P}(F_{\ell+1-\lambda_1}))$$

To modyfikacja rozmaitości Schuberta z $Gras_k(E)$ (więc $\pi_*([\widetilde{\Omega}_\lambda]) = [\Omega_\lambda(F_\bullet)]$) i jednoczesnie rozmaitość Schuberta w $Gras_{k-1}(E/taut)$ zadana przez krótszy podział $(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k)$

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{\Omega}_\lambda & \longrightarrow & \Omega_\lambda(F_\bullet) \\ & & \bigcap & & \bigcap \\ \mathbb{P}^{k-1} & \hookrightarrow & F_{k,1}(E) & \underset{\pi}{\longrightarrow} & Gras_k(E) \end{array}$$

Pozostaje skorzystać z założenia indukcyjnego i z włsności π_* dla wiązek z włóknem $\mathbb{P}^{k-1}$

11.9 Niech $B = BT$. Mamy bijekcję

$$Grass_k(\mathbb{C}^n)^T \longleftrightarrow \{I \subset \{1, \ldots, n\} : |I| = k\} \longleftrightarrow \text{ podziały}$$

Indeksujemy komórki Schuberta podziałami, a punkty stałe podzbiorami k-elementowymi, lub równoważnie podziałami. Przejście od podziałow do podzbiorów via drogi $NE \to SE$, które są brzegami diagramów Younga. Dla podziału μ przez $I(\mu) \subset \{1, \ldots, n\}$ oznaczamy odcinki drogi na południe, a $J(\mu) \subset \{1, \ldots, n\}$ na zachód. Z twierdzenia o lokalizacji

$$H_T^*(Gras_k(\mathbb{C}^n)) = \{(a_\mu) \in \bigoplus_{\text{podziały}} \Lambda : \text{ spełniające warunek GKM}\}.$$

11.10 Przykład: $Gras_2(\mathbb{C}^4)$, $\lambda=(1,0)=\square$

$$\begin{array}{cccrcl}
\mu & I(\mu) & J(\mu) & & & \\
(22) & 12 & 34 & (\sigma_\square)_{|p_{12}} & = & \sigma_{\square|(22)} = t_3+t_4-t_1-t_2 \\
(21) & 13 & 24 & (\sigma_\square)_{|p_{13}} & = & \sigma_{\square|(21)} = t_4-t_1 \\
(20) & 14 & 23 & (\sigma_\square)_{|p_{14}} & = & \sigma_{\square|(20)} = t_3-t_1 \\
(11) & 23 & 14 & (\sigma_\square)_{|p_{23}} & = & \sigma_{\square|(11)} = t_4-t_2 \\
(10) & 24 & 13 & (\sigma_\square)_{|p_{24}} & = & \sigma_{\square|(10)} = t_3-t_2 \\
(00) & 34 & 12 & (\sigma_\square)_{|p_{34}} & = & \sigma_{\square|(00)} = 0
\end{array}$$

11.11 W przykładzie wykorzystujemy: jeśli $X=\{f=0\}\subset\mathbb{C}^n$ to

$$[X]_{|0} = mult.deg(f) \in Hom(T,\mathbb{C}^*) = H^2_T(pt)$$

11.12 Ogólnie dla podziału μ

$$\sigma_{\square|\mu} = \sum_{j\in J(\mu)} t_j - \sum_{i\leq\ell} t_i = \sum_{j>\ell} t_j - \sum_{i\in I(\mu)} t_i$$

11.13 Problem: znaleźć $\sigma_{\lambda|\mu}$. Odp: double Schubert polynomials. My wypiszemy wzór z tw Kempfa-Laksova

$$\sigma_\lambda(x|t) = det(c_{\lambda_i+j-i}(i))_{1\leq i,j\leq k}$$

gdzie

$$c_\bullet(x|t)(i) = c_\bullet(E/F_{\ell+i-\lambda_i}-S) = \frac{\prod_{j>\ell+i-\lambda_i}(1+t_i)}{\prod_{i=1}^k(1+x_i)}$$

We wzorze podstawiamy za x_i pierwiastki wiązki tautologicznej.

11.14 W szczególności

$$\sigma_\square = \sum_{j>\ell} t_j - c_1(S)\,.$$

Po obcięciu do $p_{I(\mu)}$

$$\sigma_{\square|\mu} = \sum_{j>\ell} t_j - \sum_{i\in I(\mu)} t_i\,.$$

Literatura

Fulton §7 MacDonald - Symmetric Functions and Hall polynomials

Griffiths-Harris - Principles of algebraic geometry Ch I §5

12 Teoria de Rhama

G^*-algebry

12.1 Algebra różniczkowań algebry z gradacją. Algebry Lie z gradacją, moduły i algebry z gradacją nad algebrą Lie z gradacją oraz dg-moduły i algebry nad dg-algebrami Lie.

12.2 Dzialanie algebry pól wektorowych na formach różniczkowych: w języku algebry z gradacją
$[\iota_X, d] =: L_X$
$[d, L_X] = 0$
$[\iota_X, \iota_Y] = 0$
$[d, d] = 0$
$[\iota_X, L_Y] = \iota_{[X,Y]}$
Dow. Opereacje te spełniają regułę Leibniza, $\Omega^\bullet(M)$ jest generowana przez 0 formy i 1-formy df:
$[\iota_X, L_Y]df = \iota_X dL_Y f - L_Y df(X) = L_X L_Y f - L_Y L_X f = L_{[X,Y]} f = \iota_{[X,Y]} df$

12.3 Algebra $\Omega^\bullet(M)$ dla G-rozmaitości przzkładem algebry z gradacją nad algebrą Lie (z gradacją) $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[1] \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}[-1]$, gdzie $\mathbb{R}[-1] = \langle d \rangle$

12.4 Algebra $\Omega^\bullet(M)$ dla G-rozmaitości pryzkeladem dg-algebry nad $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[1] \oplus \mathfrak{g}$.

12.5 Definicja G^*-algebry: dg-algebra z działaniem G i zgodnym działaniem algebry $\tilde{\mathfrak{g}}$.

12.6 Dla zwartych grup Lie $H^*(A) = H^*(A^G)$, w szczególności $H^*(\Omega^\bullet(M)^G) = H^*(\Omega^\bullet(M))$. Dowód w notacji dla torusa. $H^*(A) = \bigoplus H^*(A)_\chi = \bigoplus H^*(A_\chi)$. Niech $a \in A_\chi$, $da = 0$. Dla jednoparametrowej podgrupy generowanej przez $\lambda \in \mathfrak{t}$ mamy $exp(t\lambda) \cdot a = t^{\langle \chi, \lambda \rangle} a$. Wtedy $L_\lambda a = \langle \chi, \lambda \rangle a$. Z drugiej strony $L_\lambda a = d\iota_\lambda a$. Jeśli $\langle \chi, \lambda \rangle \neq 0$ to forma a jest dokładna.

12.7 Lokalnie wolne działanie - warunek (C). Forma koneksji $\theta \in \Omega^1(M; \mathfrak{g}))^G$ o składowych θ^a przy wyborze bazy $\{\lambda_a\}$ przestrzeni $\mathfrak{g}$: $\theta^a(\lambda_b) = \delta^a_b$.

12.8 Elementy horyzontalne i bazowe G^*-algebry, dla wolnych działań $H^*(\Omega^*(M)_{bas}) = H^*(M/G)$

Literatura: Guillemin-Sternberg §2

13 Teoria de Rhama II

13.1 Kompleks Koszula $\Lambda(V) \otimes S(V)$, $d(x \otimes 1) = 1 \otimes x$ dla $x \in V$. Acykliczność: homoropia $Q(1 \otimes x) = x \otimes 1$, $[Q, d] = (k + \ell)Id$ na $\Lambda^k(V) \otimes S^\ell(V)$.

Założenie znacznie upraszczające formuły: $G = T$ jest torusem

13.2 Acykliczny lokalnie wolna T^*-algebra $E = \lim_n \Omega^\bullet(S^{2n-1})$ i jego oszczędny model - algebra Weila $W(\mathfrak{t}) = \Lambda(\mathfrak{t}^*) \otimes S(\mathfrak{t}^*)$, która jest kompleksem Koszula dla $V = \mathfrak{t}^*$, ma strukturę T^*-algebra z działaniem ι_λ tylko na pierwszy czynnik.

13.3 Lokalnie wolna T^*-algebra ma strukturę $W(\mathfrak{t})$-algebry.

13.4 Ekwiwariantne kohomologie $H^*_T(B) := H^*((E \otimes B)_{bas})$ dla E lokalnie wolnej acyklicznej T^*-algebry. Zgodność z definicją topologiczną dla $B = \Omega^\bullet(M)$.

13.5 Skręt Mathai-Quillena: dla T^*-algebr A i B, A lokalnie wolna

$$\phi = exp(\gamma) \in Aut(A \otimes B)$$

$$\gamma = \sum \theta^a \otimes \iota_{\lambda_a}.$$

Dobrze określony, bo $\gamma^{r+1} = 0$ dla $r = \dim(T)$.

13.6 γ więc i ϕ są T-niezmiennicze oraz

$$\phi(\iota_\xi \otimes 1 + 1 \otimes \iota_\xi)\phi^{-1} = \iota_\xi \otimes 1$$

$$\phi d \phi^{-1} = d - \sum d\theta^a \otimes \iota_{\lambda_a} + \sum \theta^a \otimes L_{\lambda_a}$$

13.7 Po skręceniu:

$$\phi((A \otimes B)_{hor}) = A_{hor} \otimes B$$

Dla $E = W(\mathfrak{t})$

$$\phi((E \otimes B)_{bas}) = S(\mathfrak{t}) \otimes B$$

z różniczką

$$\tilde{d} = 1 \otimes d - \sum \lambda^a \otimes \iota_{\lambda_a}$$

To jest **model Cartana** ekwiwariantnych kohomologii.

Literatura: Guillemin-Sternberg §3-4

Uzupełnienie:

13.8 Dla lokalnie wolnej T^*-algebry A oraz acyklicznej T^*-algebry B mamy

$$H^*((A \otimes B)_{bas}) = H^*(A_{bas}).$$

Dow: po skręceniu przez ϕ filtrujemy podkompleksami $F^i = (A_{hor}^{\geq i} \otimes B)^T$. Kohomologie ilorazu

$$H^*(F^i/F^{i+1}) = H^*((A^i_{hor} \otimes B)^T) = (A^i_{hor})^T$$

zatem włożenie $A \hookrightarrow A \otimes B$ indukuje izomorfizm na kohomologiach bazowych.

13.9 Niezależność od wyboru acyklicznej T^*-algebry E.
Dow: Niech E i E' dwa acykliczne lokalnie wolne T^*-algebry. Wtedy $E \otimes B$ jest lokalnie wolną T^*-algebrą, więc $H^*(E' \otimes (E \otimes B)_{bas}) = H^*((E \otimes B)_{bas})$.

14 Geometria symplektyczna

14.1 Przykład: S^1 lub $\mathbb{C}$ działa na $\mathbb{C}^{n+1} - 0$ diagonalnie, $\Omega^\bullet(\mathbb{C}^{n+1} - 0)$ jest lokalnie wolnym $(S^1)^*$-modułem. Wybór koneksji

$$\theta = \partial \log(|z|^2).$$

Sprawdzamy warunek

$$\theta(\lambda) = \partial_t \log(|e^{2\pi i t} z|^2) = \partial_t(\log(e^{2\pi i t}) + \log(\overline{e^{2\pi i t}}) + \log(|z|^2)) = \partial_t \log(e^{2\pi i t}) = \frac{2\pi i\, e^{2\pi i t}}{e^{2\pi i t}}.$$

Trzeba unormować, podzielić przez $2\pi i$

14.2 Wniosek $d\theta = \frac{1}{2\pi i}\bar{\partial}\partial \log(|z|^2)$ jest formą bazową, generatorem $H^2(\mathbb{P}^n)$.

14.3 Rozamaitości symplektyczne (M, ω), współrzędne Darboux, izomorfizm $TM \simeq T^*M$, pole hamiltonowskie X_f zdefiniowane przez $\iota_{X_f}\omega = df$, czyli $df(v) = \omega(X_f, v)$ dla każdego v.

14.4 Przykład: $M = \mathbb{P}^n$ z formą symplektyczną $d\theta \in \Omega^2(\mathbb{C}^{n+1} - 0)_{bas} = \Omega^2(\mathbb{P}^n)$, inny przykład nie zwarty T^*N, dla dowlnej n-wymiarowej rozmaitości N.

14.5 Nawias Poissona,

$$\{f, g\} := df(X_g) = \omega(X_f, X_g) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}$$

homomorfizm algebr Lie $C^\infty(M) \to \Gamma(TM)$

14.6 Potoki hamiltonowskie, działania hamiltonowskie, odwzorowanie momentu $\tilde{\mu} : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$

$$\begin{array}{ccc} & & C^\infty(M) \\ \tilde{\mu} & \nearrow & \downarrow \quad X_? \\ \mathfrak{g} & \to & \Gamma(TM) \end{array}$$

lub równoważnie $\mathfrak{g}$-niezmiennicza $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ taka, że dla $\lambda \in \mathfrak{g}$

$$\iota_\lambda \omega = d\langle \mu, \lambda \rangle \in \Omega^1(M).$$

W bazie $\mu = (f_1, f_2, \ldots, f_r) = \sum f_a \otimes \lambda^a$ mamy

$$\iota_{\lambda_a}\omega = df_a.$$

14.7 Działanie naturalne $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ na przestrzeni rzutowej ma odwzorowanie momentu

$$f_a([z_0 : z_1 : \cdots : z_n]) = \frac{|z_a|^2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2} \qquad \text{dla } a = 0, 1, \ldots n..$$

14.8 Związek odwzorowania momentu z ekwiwariantnymi kohomologiami. Twierdzenie: Niech T działa hamiltonowsko na rozmaitości symplektycznej z funkcją momentu μ. Wtedy $\omega^{\#} := \omega + \mu$ jest zamkniętą formą w ekwiwariantnym kompleksie de Rhama (model Cartana).
Dow. Zapisujemu w bazie $\mu = \sum f_a \otimes \lambda^a \in C^\infty(M; \mathfrak{t}^*)^T = \mathfrak{t}^* \otimes C^\infty(M)^T$

$$\tilde{d}(\omega + \mu) = -\sum \lambda^a \otimes \iota_{\lambda_a}\omega + \sum \lambda^a \otimes df_a$$

14.9 Twierdzenie Duistermaata-Heckmana jako szczególny przypadek twierdzenia o lokalizacji: Załóżmy, że S^1 działa hamiltonowsko z funkcją Hamiltona H. Załóżmy, że H ma izolowane punkty krytyczne (równoważnie M^{S^1} jest skończony). Wtedy dla każdego $\hbar \in \mathbb{C}$

$$\int_M e^{-\hbar H} \frac{\omega^n}{n!} = \sum_{p \in M^{S^1}} \frac{e^{-\hbar H(p)}}{\hbar^n eu(p)}$$

gdzie $eu(p)$ jest iloczynem wag reprezentacji stycznej T_pM.

14.10 Twierdzenie Atiyah-Guillemina-Sternberga o obrazie odwzorowania momentu [GS2] M zwarta, spójna, symplektyczna, z Hamiltonowskim działaniem torusa (tzn dopuszczające odwzorowanie momentu), zadanym przez

$$\mu : M \to \mathfrak{t}^*.$$

Wtedy zbiór punktów stałych jest sumą podrozmaitości symplektycznych $C_i, i \in I$. Na każdej składowej odwzorowanie μ jest stałe, oraz

$$\mu(M) = Conv\{f(C_i) \mid i \in I\}.$$

14.11 Przykład: przestrzeń rzutowa ze standardowym działaniem $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$

$$\mu(\mathbb{P}^n) = \text{standardowy sympleks w } \mathbb{C}^{n+1}.$$

14.12 Twierdzenie [McDuff] (dowód bardzo trudny): Jeśli działnie torusa na zwartej rozmaitości symplektycznej dopuszcza odwzorowanie momentu, to M jest ekwiwariantnie formalna.

14.13 Rozmaitości toryczne.

Literatura:
[AB] Atiyah-Bott
McDuff-Salamon, Introduction to symplectic Topology,
Kirwan, Cohomology of Quotients in Symplectic and Algebraic Geometry

15 Tematy na egzamin

1) Co to są typy orbitowe?

•Jakie są typy orbitowe działania dołączonego $SU(2)$ na algebrze Liego $\mathbf{su}(2)$?

•Niech G zwarta grupa, X ma tylko jeden typ orbitowy G/H. Wykazać, że $X \to X/G$ jest wiązką stowarzyszoną z pewna wiązką główną o grupie strukturalnej $N(H)/H$.

2) Twierdzenie o slajsie

•Niech X będzie rozmaitością Schuberta (tzn domknięciem komórki) kowymiaru 1 w $Grass_3(\mathbb{C}^6)$. Opisać slajsy orbit działania zwartego torusa.

3) Uniwersalne G-wiązki, kohomologie ekwiwariantne

•Ciąg dokładny grup $K \to G \to H$ indukuje rozwłóknienie $BK \hookrightarrow BG \twoheadrightarrow BH$.

•Wykazać, że $H^*_G(X)$ nie zależy od modelu EG.

4) Przestrzenie klasyfikujące grup Lie: modele będące granicami rozmaitości

•Znaleźć przekształcenia klasyfikujące dla potęgi wiązki tautologicznej $(\gamma_n)^{\otimes k} \to \mathbb{P}^n$ (dla $k \in \mathbb{Z}$) przyjmując model $B\mathbb{C}^* = \mathbb{P}^\infty$.

5) Kohomologie przestrzeni flag

•Opisać kohomologie przestrzeni flag F_n dla $n = 2, 3, 4$, podać wymiary w poszczególnych gradacjach, opisać odzorowania indukowane na kohomologiach pomiędzy tymi przestrzeniami, oraz indukowane z odwzorowań do $\mathbb{P}^{n-1}$ i do BT.

6) Ekwiwariantna formalność

•Mnożenie przez klasę z $H_1(T)$ zadaje operację $H_*(X) \to H_{*+1}(X)$ (lub $H^*(X) \to H^{*-1}(X)$). Wykazać, że jeśli X jest ekwiwariantnie formalna, to ta operacia jest zerowa. Podać przykład, gdy ta operacja jest zerowa, ale przestrzeń nie jest ekwiwariantnie formalna.

•Jeśli X jest ekwiwariantnie formalna, skończonego wymiaru, zwarta, to $H^*(X) \simeq H^*(X^T)$ z zachowaniem gradacji modulo 2.

7) Twierdzenie o Lokalizacji (wersja dla przestrzeni topologicznej)

•Udowodnić, że teza Twierdzenia o Lokalizacji zachodzi dla kohomologii o współczynnikach całkowitych, jeśli stabilizatory punktów są spójne.

8) Konstrukcja odwzorowania odwrotnego $S^{-1}H^*_T(X^T) \to S^{-1}H^*_T(X)$

•Obliczyć $\int_X \alpha \in H^4_T(pt)$, gdzie $X = Gras_2(\mathbb{C}^4)$, dla $\alpha = c_2(\gamma)c_1(\gamma)^4,\ c_2(\gamma)^2c_1(\gamma)^2,\ c_1(\gamma)^6$.

•Przykład zastosowania twierdzenia o lokalizacji: X rozmaitość algebraiczna rzutowa z działaniem $\mathbb{C}^*$, C krzywa z samoprzecięciem, która jest T-niezmiennicza, to C musi być zawarta w X^T.

9) GKM-graf i opis kohomologii ekwiwariantnych bez lokalizowania

•Opisać GKM-graf (wraz z charakterami odpowiadającymi krawędziom) dla grassmanianu Lagrange'a $LG(n) \subset Grass_n(\mathbb{C}^{2n})$ dla $n = 1, 2, 3$.

10) Opis pierścienia kohomologii grassmanianu

•Podać opis pierścienia kohomologii $H^*(Grass_k(\mathbb{C}^n))$ poprzez generatory i relacje.

11) Ekwiwariantny rachunek Schuberta

•Wykazać $c^{\nu}_{\lambda\mu} = 0$ jesli $\lambda \not\subset \nu$ lub $\mu \not\subset \nu$

•Wykazać: $c^{\mu}_{\lambda\mu} = \sigma_{\lambda|\mu}$

•Formuła Monka-Pieri:

$$\sigma_{\Box} \cdot \sigma_{\lambda} = \sum \sigma_{\lambda^+} + \sigma_{\Box|\lambda} \cdot \sigma_{\lambda},$$

gdzie λ^+ powstaje z λ przez dodanie jednego pudełka.

12) Działania algebry Lie na $\Omega^\bullet(M)$ dla G-rozmaitości, G^*-moduły i algebry.

•Niech A będzie algebrą z gradacją (niekoniecznie superprzemienną). Udowodnić, że A z operacją superkomutatora jest superalgebrą Lie.

•Niech M będzie rozmaitością riemannowską z działaniem S^1 przez izometrie, bez punktów stałych. Podać jawnym wzorem odwzorowanie $W(\mathfrak{t}) \to \Omega^\bullet(M)$.

13) Model Cartana ekwiwariantnych kohomologii dla działania torusa.

•Udowodnić, że dla lokalnie wolnej T^*-algebry A oraz acyklicznej T^*-algebry B mamy

$$H^*((A \otimes B)_{bas}) = H^*(A_{bas}).$$

•Sprawdzić, że $\tilde{d}^2 = 0$ w modelu Cartana (dla torusa) nie odwołując się do skrętu Mathai-Quillena

14) Związek odwzorowania momentu z ekwiwariantną teorią de Rhama.

•na rozmaitości symplektyczniej działa torus zachowujący formę symplektyczną ω. Czy mamy bijekcję pomiędzy dwoma konstrukcjami:

1) znalezienie odwzorowanie momentu

2) konstrukcja formy zamkniętej formy $\omega^{\#} \in S^\bullet(\mathfrak{t}^*) \otimes \Omega^\bullet(M)^T$, która odwzorowuje się na ω przy rzutowaniu na $\Omega^\bullet(M)$?

•W $\mathbb{P}^n$ z działaniem liniowym $\mathbb{C}^*$ nie ma zamkniętych łańcuchów orbit działania $exp(\mathbb{R}_+)$.

Literatura do całości:

[AB] M. Atiyah, R. Bott *The moment map and equivariant cohomology*, Topology, 23 (1984) 1-28.

[BV] N. Berline, M. Vergne. *Classes caractéristiques equivariantes. Formule de localization en cohomologie équivariante*, C.R. Acad. Sc. Paris 295 (1982), 539-541.

[EdGr] D. Edidin, W. Graham. *Localization in equivariant intersection theory and the Bott residue formula*, Am. J. Math. 120, No.3, 619-636 (1998)

[Fu] W. Fulton. *Equivariant Cohomology in Algebraic Geometry*, Notes by D. Anderson, http://www.math.washington.edu/∼dandersn/eilenberg

[YT] W. Fulton. *Young tableaux with applications to representation theory and geometry*, London Mathematical Society Student Texts 35 (1997), Cambridge University Press, Cambridge.

[GKM] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, *Equivariant Cohomology, Koszul Duality, and the Localization Theorem*, Invent. Math. 131, No.1, (1998), 25?83

[GH] Griffiths-Harris, *Principles of algebraic geometry*

[GS] V. Guillemin, S. Sternberg (Author), *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory*, Springer 1999

[GS2] V. Guillemin and S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping*, Inv. Math. 67 (1982), 491513.

[Ki] F. Kirwan, *Cohomology of Quotients in Symplectic and Algebraic Geometry*, Mathematical Notes, vol. 31, Princeton University Press, Princeton N.J., 1984.

[McD] I. G. MacDonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, 1998

[MDS] McDuff-Salamon, *Introduction to symplectic Topology*, Oxford University Press, 1998

[Qu] D. Quillen *The Spectrum of an Equivariant Cohomology Ring: I*, Ann. Math., Vol. 94, No. 3, 549-572