Zadania z matematyki dla geografów

Andrzej Weber
http://www.mimuw.edu.pl/∼aweber/zadania/

1 Literatura – podręczniki i zadania

- Adam Łomnicki - Wprowadzenie do statystyki dla przyrodników (łatwe w czytaniu)

Dodatkowo:

- Mieczysław Sobczyk Statystyka (PWN 2004, dużo więcej informacji)
- W. Oktaba, E. Niedokos - Matematyka i podstawy statystyki matematycznej
- Krysicki W. Bartos J. Dyczka W. Królikowska K. Wasilewski M. - Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach

2 Kombinatoryka i prawdopodobieństwo.

1 Na ile sposobów można ustawić w szeregu 7 nierozróżnialnych żółwi i 5 nierozróżnialnych kotów?

2 Na ile sposobów ośmiu ludzi może usiąść przy okrągłym stole?

3 Na ile sposobów dziewięciu ludzi może wsiąść do trzech wagonów?

4 Na ile sposobów dziewięciu ludzi może wsiąść do trzech wagonów tak, że do pierwszego wsiądzie 2 pasażerów, do drugiego 3, a do trzeciego 4.

5 Na ile sposobów liczbę 9 można zapisać jako sumę trzech liczb całkowitych, nieujemnych?

6 W kubełku jest 8 kul czerwonych, 3 białe oraz 7 czarnych. Losujemy bez zwracania 2 kule. Jaka jest szansa, że będą to kule biała i czerwona?

7 Rzucamy n kostek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na każdej z kostek wypadnie inna liczba?

8 Iloma kostkami trzeba rzucać aby z prawdopodobieństwem 1/2 można było twierdzić, że wypadnie conajmniej jedna szóstka?

9 Dziesięć razy rzucamy parą kostek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie 3 razy suma oczek będzie większa od 3.

10 W pierwszej szufladzie są dwie kule: biała i czarna, w drugiej dwie białe i czarna, w trzeciej cztery białe i dwie czarne. Prawdopodobieństwo wylosowania pierwszej szuflady wynosi 1/2, drugiej 1/3, trzeciej 1/6. Wyciągamy na ślepo jedną kulę z losowo wybranej szuflady.
— jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli?
— wiedząc, że wylosowaliśmy biała kulę, jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodziła z pierwszej szuflady?

11 W worku są 4 białe kule i 3 czarne. Wyciągamy jedną kulę, a następnie zwracamy ją do worka wraz z trzema innymi tego samego koloru. Drugi raz wyciągamy kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie biała?

12 W trzech koszyczkach losowo rozmieszczamy 5 jabłuszek i 3 śliweczki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

— w jednym z koszyczków będą dokładnie 2 jabłuszka i jedna śliweczka?

— jeden koszyczek będzie pusty, a w innym będą dokładnie 2 jabłuszka i jedna śliweczka?

3 Zmienne losowe

13 Rzucamy raz kostką i trzy razy monetą. Zmienna losowa X jest równa 1, gdy na kostce wypadło pięć lub sześć oczek, a w przeciwnym przypadku –2. Zmienna Y jest równa liczbie orłów.
Określić rozkład zmiennych losowych: X, Y, $X+Y$, XY. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennych X, Y, $X+Y$, XY oraz określić ich wariancję i odchylenie standardowe.

14 Rzucamy jednocześnie kostką i monetą. Określamy zmienną losową X:
— jeśli wypanie orzeł, to $X = 4$
— jeśli wypadnie reszka, to $X =$ ilość oczek na kostce.
Znaleźć rozkład, dystrybuantę, wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe.

15 Czy że ciąg p_n zadaje prawdopodobieństwo na zbiorze liczb całkowitych dodatnich.
a. $p_n = \frac{2}{3^n}$
b. $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$

16 Zmienna losowa X osiąga tylko wartości całkowite dodatnie, przy czym $P(X = k) = \frac{6}{7^k}$. Oblicz $E(X)$.

17 Rzucamy nieuczciwą monetą (prawdopodobieśtwo orła 1/10, a reszki 9/10). Rzucamy dopóki nie wypadnie orzeł. Zmienna losowa X jest równa ilości rzutów. Znaleźć rozkład, dystrybuantę i wartość oczekiwaną.

18 Strzelamy do okrągłej tarczy o promieniu 1 metr. Trafienie w każdy punkt jest tak samo prawdopodobne. Zmienną losową jest odlegóść od środka. Znaleźć dustrybuantę.

19 Naszkicuj dystrubuantę zmiennej losowej X, jeśli ma ona rozkład Bernoulliego z
a. $p = 1/2$ i $n = 3$
b. $p = 1/3$ i $n = 3$
c. $p = 1/2$ i $n = 4$

20 Narysuj wykres funkcji $\phi(x)$ i sprawdź, czy funkcja ta jest gęstością rozkładu pewnej zmiennej losowej
a. $\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in [0,2] \\ 0 & \text{w innych przypadkach} \end{cases}$
b. $\phi(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0,1) \\ x-1 & \text{dla } x \in [1,2) \\ 0 & \text{w innych przypadkach} \end{cases}$
c. $\phi(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0,1) \\ 2-x & \text{dla } x \in [1,2) \\ 0 & \text{w innych przypadkach} \end{cases}$
d. $\phi(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [1,2) \\ -\frac{1}{2}x+1 & \text{dla } x \in [2,3) \\ 0 & \text{w innych przypadkach} \end{cases}$

21 Dla tych powyższych funkcji, które są gęstościami, znajdź prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa przyjmie wartość z przedziału $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

22 Dla tych powyższych funkcji, które są gęstościami, naszkicuj odpowiadającą im dystrybuantę.

4 Tw. de Moivre'a-Laplace'a

23 Korzystajac z tablic określ, jaka jest szansa, że zmienna losowa o standardowym rozkładzie normalnym przyjmie wartość z przedziału
a. [-1,72;1,3]
b. [-0,73;0,48]
c. [1,33; 4,15]
d. [-2,75;-1,34]

24 Dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym ze średnią 410 i odchyleniem standardowym 2 wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przyjmie ona wartość mniejszą między 407 a 415.

25 Dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym ze średnią 500 i odchyleniem standardowym 20 wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przyjmie ona wartość większą niż 555.

26 Dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym ze średnią -44 i odchyleniem standardowym 16 wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przyjmie ona wartość dodatnią.

27 Dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym ze średnią 674 i odchyleniem standardowym 55 wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przyjmie ona wartość mniejszą niż 600.

28 W worku jest 30 000 000 kul, z czego 55% stanowią kule czarne, a 45% białe. Losowo wyciągamy 1000 kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy conajmniej 52% kul białych.
Uwaga: W zadaniu występują duże liczby. Dokładne wykonanie obliczeń jest praktycznie niemożliwe. Przybliżony wynik będziemy umieli podać, dzięki twierdzeniu granicznemu.

29 Oblicz, jaka jest szansa, że w 1000 rzutach monetą
a. co najmniej 600 razy wypadnie orzeł
b. co najwyżej 550 razy wypadnie reszka
c. wypadnie od 450 do 550 orłów
d. wypadnie od 400 do 500 reszek

30 Grupa 500 osób stoi na rozdrożu. Każdy z zebranych rzuca kostką. Jeśli wypadnie 1 lub 5 oczek idzie w lewo, a jeśli 2,3,4 lub 6 oczek to w prawo. Jaka jest szansa, że na prawo pójdzie co najmniej 300 osób?

31 Każdy z 400 studentów mieszkających w akademiku spędza w pokoju cichej nauki 3 godziny dziennie, przy czym ochota na taką pracę przychodzi studentom niezależnie od godziny (rozkład chwili wyjścia do pokoju cichej nauki jest jednostajny na przedziale 24 godzin). Obliczyć, ile stolików potrzeba w poko- ju cichej nauki, by w danej chwili z prawdopodobieństwem 95% mieścił on wszystkich chętnych do nauki.

32 Czas oczekiwania na połączenie telefoniczne z pewnym biurem jest zmienną losową o rozkładzie normalnym o średniej równej 45 sekund z odchyleniem standardowym 10 sekund. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że połączę się z tym biurem w ciągu 40 sekund. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że będę musiał czekać ponad 70 sekund.

33 Firma produkująca opony samochodowe zakłada, że opona wytrzymuje średnio 50000 km z odchyleniem 5000 km. Firma chce dać gwarancję i wymieniać bezpłatnie przedwcześnie zużyte opony, tak jednak, by nie wymieniać więcej niż 10 procent opon. Na ile kilometrów powinna opiewać gwarancja? Zakładamy, że rozkład prawdopodobieństwa jest normalny.

5 Testowanie hipotez.

34 Wyciągamy (i zwracamy) karty z pełnej talii (52 karty).
a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciągnąc 10 razy dokładnie trzy razy wyciągniemy figurę lub asa?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciągnąc 300 razy wyciągniemy figurę lub asa conajwyżej 90 razy?
c) Nasz kolega wyciąga kartę 300 razy. My liczymy ilość figur i asów. Ile by musiało ich być abyśmy uznali z 95-cio procentową pewnością, że kolega oszukuje (tzn. określić obszar krytyczny dla testu jednostronnego hipotezy, że kolega jest uczciwy)?

35 Wyciągamy (i zwracamy) karty z pełnej talii (52 karty).
a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciągnąc 10 razy dokładnie dwa razy wyciągniemy kartę z liczbą podzielną przez 2?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciągnąc 300 razy wyciągniemy kartę z liczbą podzielną przez 2 conajmniej 118 razy?
c) Nasz kolega wyciąga kartę 300 razy. My liczymy ilość kart z liczbą podzielną przez 2. Ile by musiało ich być abyśmy uznali z 95-cio procentową pewnością, że kolega oszukuje (tzn. określić obszar krytyczny dla testu jednostronnego hipotezy, że kolega jest uczciwy)?

36 Z wieloletnich badań wynika, że średnia temperatura w lipcu na Hali Gąsienicowej o godz. 12 GMT wynosi 13,7 stopnia z odchyleniem standardowym 2,2 stopnia. Pewnego roku średnia wyniosła 10 stopni. Czy można uważać, klimat na Hali Gąsienicowej się zmienił?

37 Załóżmy, że przez n kolejnych lat średnia temperatura lipca na Hali Gąsienicowej wynosi dokładnie 15 stopni. Wyznaczyć n tak, żeby na poziomie istotności 5% można było przyjąć hipotezę o zmianie średniej temperatury na Hali Gąsienicowej.

38 Wiadomo, że średnia krajowa długość łapy dzięcioła zielonego wynosi 4,2cm z odchyleniem standardowym 0.7cm. Zakładamy, że długość łapy ma rozkład normalny.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że przypadkowo zaobserwowany dzięcioł ma łapę dłuższą niż 4.3cm?
b) Jakie jest odchylenie standardowe średniej długości łapy, jeśli średnia jest liczona z grupy 15 dzięciołów?
c) W lesie Radziejewskim leśnik zmierzył łapy u 15 dzięciołów. Otrzymał średnią 4.4cm. Czy może twierdzić, że dzięcioły w jego lesie mają łapy innej długości niż w reszcie Polski? (Zastosować test dwustronny o istotności 0.05.)

39 Badania wykazały, że średnie zużycie paliwa w pewnym modelu samochodu wynosi 7 litrów na 100 km. Wprowadzono nowy model. 50 jazd próbnych dało średnią 6,9 z odchyleniem standardowym 0,04. Czy na poziomie istotności 0,05 firma może twierdzić, że nowy model zużywa mniej paliwa?

6 Przedziały ufności

40 W pewnym norweskim kurorcie pomiar temperatury powietrza o godzinie 13:00 w ciągu 56 dni lata dał wyniki:
10,3 16,2 22,0 17,9 17,9 14,5 13,4 17,8
24,8 20,9 15,8 23,6 24,4 13,7 15,8 12,1
18,7 22,6 13,1 15,3 12,6 18,3 16,1 20,5
17,5 18,0 15,0 15,6 18,0 14,5 22,1 11,8
13,0 11,8 21,8 20,8 16,5 21,7 19,8 16,0
24,0 10,7 12,9 17,3 23,6 13,3 11,8 22,1
11,3 20,3 21,1 17,8 14,1 16,9 10,2 18,0
Wyznaczyć przedział ufności średniej temperatury i określić odchylenie standardowe. Na podstawie tych danych wyznaczyć prawdopodobieństwostwo, że temperatura jest między 16 a 20 stopni:
a. w danym dniu;
b. średnia temperatura lipca.

41 Makler giełdowy analizuje zyski. Losowa próbka 15 spółek dała przeciętną roczną stopę zwrotu = 0,37% z odchyleniem standardowym s = 3,5%. Zakładając, wielkość zysku podlega rozkładowi normalnemu, podać 95% przedział ufności dla średniej.

42 Właściciel stacji benzynowej chce poznać, ile litrów paliwa tankuje przeciętny kierowca. Losowa próbka 50 tankowań dała średnią wielkość 28,5 litra z odchyleniem standardowym 5,6 litra. Właściciel chce dawać misia pluszowego kierowcom, który tankują jednorazowo ponad 45 litrów. Zakładając, że dziennie stację odwiedza 1000 klientów, ile pluszowych misiów powinien przygotować na pierwszy dzień akcji?

43 W sytuacji z poprzedniego zadania, właściciel przygotował 2 razy mniej misiów. Jak powinien ustawić limit, od którego kierowcom należy się prezent?

7 Zadania o korelacji

44 A. Badano korelację koloru oczu i koloru włosów. Zebrano dane o 273 mężczyznach. Było wśród nich
– 135 blondynów
– 138 brunetów
– 127 miało jasne oczy
– 146 miało ciemne oczy.
Zakładając, że nie ma korelacji pomiędzy kolorem oczu a włosów podać wartości oczekiwane ilości
– blondynów o jasnych oczach,
– brunetów o jasnych oczach,
– blondynów o ciemnych oczach,
– brunetów o ciemnych oczach.

B. Okazało się, że jest
– 73 blondynów o jasnych oczach,
– 54 brunetów o jasnych oczach,
– 62 blondynów o ciemnych oczach,
– 84 brunetów o ciemnych oczach.
Stosując test χ^2 na poziomie istotności 5% (wartość krytyczna dla $df = 1$ wynosi 3.841) stwierdzić czy możemy odrzucić hipotezę, że cechy nie są skorelowane.

45 Podzielić studentów na 2 grupy: urodzeni w porze letniej (kwiecień-wrzesień) i urodzeni w porze zimowej (październik-marzec). Zbadać korelację pomiędzy płcią a porą urodzenia.

46 W grupie studentów zbadać korelację pomiędzy wzrostem (w cm) a wiekiem (w miesiącach).

47 Prowadzono badania socjologiczne wśród 100 Pigmejów. Przez X oznaczano wzrost (w centymetracmetrach), przez Y długość paznokcia. Otrzymano dane
– $\sum X = 14\,803$
– $\sum Y = 342$
– $\sum X^2 = 2\,210\,234$
– $\sum Y^2 = 1\,241$
– $\sum XY = 24\,568$
Obliczyć współczynnik korelacji r. Czy korelacja jest silna czy słaba? Czy dane są istotne statystycznie (zastosowac zmienną Studenta $t = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$)? Czy należy sie spodziewać, że wyższy osobnik ma dłuższy paznokieć?

8 Zadania o Ziemi

48 Wyobraźmy sobie, że po opasaniu Ziemi sznurkiem dowiązaliśmy jeszcze dwa metry do sznurka i naciągnęliśmy sznurek, tak, by utworzył się ,,daszek". Jaka będzie wysokość daszka?

Przyjąć, że dla małych kątów α funkja tangnes jest dobrze przybliżona przez $\operatorname{tg}\alpha \simeq \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$.

49 Jak wysoko trzeba się wzbić nad Gdańsk żeby zobaczyć ośmiotysięczniki w Himalajach. (Przyjąć, że odległość z Gdańska do Himalajów jest równa 6100 km.)

50 Czy z wybrzeży półwyspu Peloponezu można zobaczyć szczyty gór Krety (około 2450 m)? Jeśli tak, to pod jakim kątem je widać?

51 Obliczyć jaka jest odległoś:
— z Moskwy do Kalkuty
— z Warszawy do Buenos Aires

Wsk: Obliczyć odległości znajdując współrzędne geograficzne powyższych miast. Licząc odległość linijką na mapie z pewnością popełnimy błąd, gdyż każda mapa deformuje odległości.

52 Leci samolot z Lyonu do Montrealu. Leci najkrótszą drogą. Przyjmując, że oba miasta leżą na tej samej szerokości geograficznej obliczyć jak daleko (w stopniach) samolot ,,zboczy" na północ.

53 Polarnik znajduje się na biegunie w okolicy równoleżnika 80^o. W ciągu godziny jego pozycja zmieniła się o 1 minutę na północ i 6 minut na wschód. Jaka jest jego prędkość poruszania się w km/h?

54 Wyobraźmy sobie trójkąt na powierzchni Ziemi o polu powierzchni równej polu powierzchni Polski. Jaka jest suma jego kątów.

9 Test 1

Rzucamy kostką czworościenną:
1) Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając 300 razy jedynka wypadnie conajmniej 70 razy
2) Rzucamy kostką 300 razy i liczymy ilość jedynek. Ile jedynek by musiało wypaść abyśmy uznali z 95-cio procentową pewnością, że kostka nie jest symetryczna. Podac hipotezę zerową i obszar krytyczny.

Rzucamy kostką sześcienną:
1) Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając 300 razy jedynka wypadnie conajmniej 45 razy
2) Rzucamy kostką 300 razy i liczymy ilość jedynek. Ile jedynek by musiało wypaść abyśmy uznali z 95-cio procentową pewnością, że kostka nie jest symetryczna. Podac hipotezę zerową, dobrać zmienną losową i znaleść obszar krytyczny.

Rzucamy kostką ośmiościenną:
1) Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając 300 razy jedynka wypadnie conajmniej 35 razy
2) Rzucamy kostką 300 razy i liczymy ilość jedynek. Ile jedynek by musiało wypaść abyśmy uznali z 95-cio procentową pewnością, że kostka nie jest symetryczna. Podac hipotezę zerową, dobrać zmienną losową i znaleść obszar krytyczny.

Rzucamy kostką dwunastościenną:
1) Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając 300 razy jedynka wypadnie conajmniej 20 razy
2) Rzucamy kostką 300 razy i liczymy ilość jedynek. Ile jedynek by musiało wypaść abyśmy uznali z 95-cio procentową pewnością, że kostka nie jest symetryczna. Podac hipotezę zerową, dobrać zmienną losową i znaleść obszar krytyczny.

Rzucamy kostką dwudziestościenną:
1) Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając 300 razy jedynka wypadnie conajmniej 12 razy
2) Rzucamy kostką 300 razy i liczymy ilość jedynek. Ile jedynek by musiało wypaść abyśmy uznali z 95-cio procentową pewnością, że kostka nie jest symetryczna. Podac hipotezę zerową, dobrać zmienną losową i znaleść obszar krytyczny.

10 Test 2

Urząd statystyczny w Brazylii podał do wiadomości, że 53.42% ludności kraju stanowią kobiety.
1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród pięciu osób przypadkowo spotkanych będzie conajwyżej jedna kobieta.

2. Badamy ludność południa kraju. Chcemy wiedzieć czy tam też kobiety stanowią taką samą część populacji. Ustaliliśmy poziom ufnośći 1% i dysponujemy danymi 10 000 osób. Opisać test hipotezy, że proporcja na południu kraju jest taka sama jak w całym kraju, tzn:
a) podać zmienną losową,

b) obliczyć wartość oczekiwaną,

c) obliczyć odchylenie standardowe,

d) uzasadnić, że ta zmienna ma rozkład zbliżony do rozkładu normalnego,

e) podać obszar krytyczny.

3. Okazało się że w naszej grupie badanej było 53.41%. Jaka jest nasza decyzja?

4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kobiet będzie conajmniej 53.41%.

Urząd statystyczny w Argentynie podał do wiadomości, że 51.22% ludności kraju stanowią kobiety.
1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród pięciu osób przypadkowo spotkanych będzie conajwyżej jedna kobieta.

2. Badamy ludność południa kraju. Chcemy wiedzieć czy tam też kobiety stanowią taką samą część populacji. Ustaliliśmy poziom ufnośći 1% i dysponujemy danymi 10 000 osób. Opisać test hipotezy, że proporcja na południu kraju jest taka sama jak w całym kraju, tzn:
a) podać zmienną losową,

b) obliczyć wartość oczekiwaną,

c) obliczyć odchylenie standardowe,

d) uzasadnić, że ta zmienna ma rozkład zbliżony do rozkładu normalnego,

e) podać obszar krytyczny.

3. Okazało się że w naszej grupie badanej było 51.23%. Jaka jest nasza decyzja?

4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kobiet będzie conajmniej 51.23%.

11 Zadania przygotowawcze do kolokwium I

1.Pies i 2 nierozróżnialne koty jadą windą w 15-piętrowym wieżowcu. Na ile sposobów mogą wysiąść, pod warunkiem, że żaden kot nie wysiądzie z psem?

2.Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w 30 rzutach monetą dokładnie 4 razy wypadnie orzeł? Podać dokładny wynik.

3.Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma oczek wyrzuconych w dwóch rzutach kostką jest podzielna przez 4?

4.Ania i Paweł spotykają się na przystanku między 20.00, a 21.00. Zarówno Ania jak i Paweł zgodzili się poczekać na drugą osobę 10 minut. Jaka jest szansa, że się nie spotkają? (Zakładamy, że szansa przyjścia Ani (i Pawła) na przystanek dla dwóch dowolnych minut między 20.00 a 21.00 jest ta sama.)

5.Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w 30 rzutach monetą dokładnie 4 razy wypadnie orzeł? Podać dokładny wynik.

6.Gramy w następującą grę. Raz rzucamy kostką i raz monetą. Zmienna losowa X jest określona następująco:
X=0, gdy wypadnie na kostce 1, 2, 3 lub 5,
X=1, gdy wypadnie na kostce 4 lub 6 a na monecie orzeł,
X=5, gdy wypadnie na kostce 4 lub 6 a na monecie reszka.
a. przedstaw rozkład zmiennej losowej X. b. oblicz jej wartość oczekiwaną i wariancję.

7.Dystrybuanta F zmiennej losowej Y jest zadana wzorem:
$F(Y) = 0$, dla $Y < 0$
$F(Y) = 1$, dla $Y > 3$
$F(Y) = Y/3$ w pozostałych przypadkach.
Oblicz $P(1 < Y < 100)$.

8.Gęstość zmiennej losowej dana jest wzorem: $g(x) = |x|$, gdy $|x| < 1$ oraz $g(x) = 0$ w pozostałych przypadkach. Oblicz $P(-3 < x < 0.5)$.

9.Oblicz prawdopodobieństwo, że w 200 rzutach monetą wypadło mniej niż 110 orłów

10.Rzucamy kostką 12-ścienną 300 razy i liczymy ilość jedynek. Ile jedynek by musiało wypaść abyśmy uznali z 95-cio procentową pewnością, że kostka nie jest symetryczna (tzn. określić obszar krytyczny dla testu hipotezy, że kostka jest symetryczna).

11.Wiadomo, że średnia długość łapy dzięcioła zielonego wynosi 4,2cm z odchyleniem standardowym 0.7 cm. W lesie Radziejewskim leśnik zmierzył łapy u 15 dzięciołów. Otrzymał średnią 4.4cm. Czy może twierdzić, że dzięcioły w jego lesie mają inną średnia długość łapy? (Zastosować test dwustronny o istotności 5%.)

12.Mierzono długości kocich ogonów. Okazało się: - dla 31 kotów czarnych średni pomiar wynosił 23.3cm z odchyleniem standardowym 4.1 cm. - dla 39 kotów pręgowanych średni pomiar wynosił 21.2cm z odchyleniem standardowym 3.2 cm. Czy średnia długości ogonów kotów czarnych jest większa? (Zastosować test jednostronny o istotności 5%.)

12 Kolokwium I

GRUPA A

---

1. Niech X będzie zmienną o rozkładzie normalnym, z wartością oczekiwaną równą 345 i odchyleniu standardowym równym 10. Oblicz prawdopodobieństwo, że $350 < X < 365$.

2. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma oczek wyrzuconych w dwóch rzutach kostką jest większa od 4 i mniejsza od 11?

3. Darek i Paweł spotykają się w barze między 20.00, a 24.00, przy czym Darek czeka na Pawła do skutku, a Paweł zagląda tylko do środka i zaraz wychodzi. Jaka jest szansa, że Darek będzie czekał conajmniej 1 godzinę? Zakładamy, że szansa przyjścia Darka (i Pawła) do baru dla dwóch dowolnych minut między 20.00 a 24.00 jest taka sama.

4. Żółw i 3 koty: biały, czarny i rudy jadą 10-ciowagonowym pociągiem. Na ile sposobów mogą wsiąść, do wagonów, jeśli wiadomo, że żaden kot nie będzie chciał jechać sam?

5. Wiadomo, że średnia długość dzioba dziobaka wynosi 14,2 cm z odchyleniem standardowym 1.7 cm. Na Tasmanii podróżnik zmierzył dzioby u 20 dziobaków. Otrzymał średnią 15.4 cm. Czy może twierdzić, że dziobaki na Tasmanii mają większą średnia długość dzioba? (Zastosować test jednostronny o istotności 5%.)

6. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w 12 rzutach monetą dokładnie 5 razy wypadnie orzeł?

7. Gęstość zmiennej losowej dana jest wzorem: $g(x) = 1 - |x|$, gdy $|x| < 1$ oraz $g(x) = 0$ w pozostałych przypadkach. Oblicz $P(-7 < x < 0,5)$.

8. Oblicz prawdopodobieństwo, że w 1000 rzutach monetą wypadło mniej niż 510 orłów.

9. Dystrybuanta F zmiennej losowej Y jest zadana wzorem:

$$F(Y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad Y < 10 \\ \frac{1}{20}(Y-10) & \text{dla} \quad 10 \le Y \le 30 \\ 1 & \text{dla} \quad Y > 30 \end{cases}$$

Oblicz $P(20 < Y < 1000)$.

10. Rzucamy kostką sześcienną 300 razy i liczymy ilość trójek. Ile trójek by musiało wypaść abyśmy uznali z 99-cio procentową pewnością, że kostka nie jest symetryczna (tzn. określić obszar krytyczny dla testu hipotezy, że kostka jest symetryczna).

11. Gramy w następującą grę. Raz rzucamy dwiema monetami. Zmienna losowa X jest określona następująco:

$X = 9$ – gdy wypadaną dwie reszki,
$X = 7$ – gdy wypadnie jedna reszka,
$X = 2$ – gdy nie wypadnie żadna reszka.

a) Podaj rozkład zmiennej losowej X.
b) Oblicz jej wartość oczekiwaną i wariancję.

Odpowiedzi. **1.** około 0,2857 **2.** 3/4 **3.** 9/32 **4.** 370 **5.** Tak **6.** $12!/5!7!2^{12} = 0.1933..$ **7.** 7/8 **8.** około 0.7357 **9.** 1/2 **10.** mniej niż 34 lub więcej niż 66 **11.** $EX = 25/4$, $s^2X = 107/16$

GRUPA B

1. Wiadomo, że średnia długość kolca kolczatki wynosi 3,2 cm z odchyleniem standardowym 0.2 cm. Na Tasmanii podróżnik zmierzył kolce u 18 kolczatek. Otrzymał średnią 4.1 cm. Czy może twierdzić, że kolczatki na Tasmanii mają większą średnią długość kolca? (Zastosować test jednostronny o istotności 1%.)

2. Rzucamy kostką sześcienną 500 razy i liczymy ilość piątek. Ile piątek by musiało wypaść abyśmy uznali z 95-cio procentową pewnością, że kostka nie jest symetryczna (tzn. określić obszar krytyczny dla testu hipotezy, że kostka jest symetryczna).

3. Niech X będzie zmienną o rozkładzie normalnym, z wartością oczekiwaną równą 333 i odchyleniu standardowym równym 30. Oblicz prawdopodobieństwo, że $303 < X < 393$.

4. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w 8 rzutach monetą dokładnie 6 razy wypadnie orzeł?

5. Gęstość zmiennej losowej dana jest wzorem: $g(x) = 1 - |x|$, gdy $|x| < 1$ oraz $g(x) = 0$ w pozostałych przypadkach. Oblicz $P(-0,5 < x < 0,5)$.

6. Dystrybuanta F zmiennej losowej Y jest zadana wzorem:

$$F(Y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad Y < 20 \\ \frac{1}{30}(Y-20) & \text{dla} \quad 20 \leq Y \leq 50 \\ 1 & \text{dla} \quad Y > 50 \end{cases}$$

Oblicz $P(35 < Y < 1000)$.

7. Gramy w następującą grę. Raz rzucamy dwiema monetami. Zmienna losowa X jest określona następująco:

$X = 4$ – gdy wypadaną dwa orły,
$X = 3$ – gdy wypadnie jeden orzeł,
$X = 5$ – gdy nie wypadnie żaden orzeł.

a) Podaj rozkład zmiennej losowej X.
b) Oblicz jej wartość oczekiwaną i wariancję.

8. Oblicz prawdopodobieństwo, że w 2000 rzutach monetą wypadło więcej niż 1010 orłów.

9. Darek i Paweł spotykają się w barze między 18.00, a 24.00, przy czym Darek czeka na Pawła do skutku, a Paweł zagląda tylko do środka i zaraz wychodzi. Jaka jest szansa, że Darek będzie czekał conajmniej 2 godzinę? Zakładamy, że szansa przyjścia Darka (i Pawła) do baru dla dwóch dowolnych minut między 20.00 a 24.00 jest taka sama.

10. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma oczek wyrzuconych w dwóch rzutach kostką jest większa od 3 i mniejsza od 10?

11. Żółw i 3 koty: biały, czarny i rudy jadą 9-ciowagonowym pociągiem. Na ile sposobów mogą wsiąść, do wagonów, jeśli wiadomo, że żaden kot nie będzie chciał jechać sam?

Odpowiedzi. **1.** Tak **2.** mniej niz 68 lub wiecej niż 99 **3.** około 0.8186 **4.** $8!/6!2!2^8 = 7/64$ **5.** 3/4 **6.** 1/2 **7.** EX=15/4, $s^2X = 11/16$ **8.** około 0.3192 **9.** 2/9 **10.** 27/36 **11.** 297

13 Zadania przygotowawcze do kolokwium II

1A. Badano korelację płci i upodobań muzycznyh. Zebrano 200 odpowiedzi:
– 86 mężczyzn,
– 114 kobiet,
– 38 lubi jazz,
– 162 nie lubi jazzu.
Zakładając, że nie ma korelacji pomiędzy płcią a upodobaniami muzycznymi podać wartości oczekiwane ilości kobiet i mężczyzn lubiących jazz.

1B. Okazało się, że tylko 13 kobiet lubi jazz. Stosując test χ^2 na poziomie istotności 5% (wartość krytyczna dla $df = 1$ wynosi 3.841) stwierdzić, czy możemy odrzucić hipotezę, że cechy nie są skorelowane.

2. Badamy dwie cechy X i Y. Otrzymaliśmy wyniki

X	1	4	4
Y	2	2	8

Znaleźć współczynniki korelacji liniowej $Y = a + cX$ oraz $X = c + dY$. Na papierze kratkowanym zrobić rysunek, na którym będą naniesione punkty (X, Y) oraz wykreślone proste korelacji.

3. Prowadzono badania socjologiczne wśród 100 Papuasów. Przez X oznaczano wzrost (w centymetracmetrach), przez Y długość paznokcia. Otrzymano dane
– $\sum X = 14\,803$
– $\sum Y = 342$
– $\sum X^2 = 2\,210\,234$
– $\sum Y^2 = 1\,241$
– $\sum XY = 14\,568$
Obliczyć współczynnik korelacji r. Czy korelacja jest silna czy słaba? O czym to świadczy?
Czy dane są istotne statystycznie (zastosowac zmienną Studenta $t = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$)?

4A. Współczynik korelacji Pearsona r dla pewnych cech X i Y wynosi $-0,87$. Czy należy sie spodziewać, że im większa wartość X tym większa wartość Y. Jeśli nie, to czego się trzeba spodziewać?

4B. Współczynik korelacji Pearsona r dla pewnych cech X i Y wynosi $0,13$. Czy należy sie spodziewać, że im większa wartość X tym większa wartość Y. Jeśli nie, to czego się trzeba spodziewać?

5. Patrzymy na wieżowiec z punktów A i B. Punkty A, B i wieżowiec są położone na jednej prostej. Odległość od A do B wynosi 90 m. Z punktu A widać wieżowiec pod kątem 20,5 stopnia, a z punktu B pod kątem 38,1 stopni. Jak wysoki jest wieżowiec?

6. Robinson Cruzoe (oczy piwne, wys. 1,70 m) tkwi na samotnej wyspie. Jak daleko będzie od brzegu statek piracki, gdy Robinson zobaczy czarną flagę (u piratów flagi wiszą na wysokości 35 m nad poziomem wody)? Czy wspiąwszy się na stojącą obok palmę (wysokość 7 m) zobaczy pokład statku (4 m nad poziomem wody)?

7. Mamy mapę Tatr 1:30 000. Ze schroniska nad Morskim Okiem (1406 m) do Wielkiego Mięguszowieckiego Szczytu (2438 m) jest na mapie dokładnie 6 cm. Pod jakim kątem widać szczyt?

8. Po powierzchni ziemi odległość Moskwa–Berlin jest równa około 1600 km. Z Moskwy kopią tunel w prostej linini do Berlina. Jak głeboko przejdzie pod ziemią?

9. Podóżnik znajdował się na równoleżniku N77. Przeszedł dokładnie 20 km na północ, 20 km na zachód, 20 km na południe i 20 km na wschód. Jak daleko ma do punktu wyjścia?

14 Kolokwium II

Grupa A

1. Dany jest trójkąt na powierzchni Ziemi. Jego pole wynosi 320 km^2. Podać jego sumę kątów. (2pt)

2. Czy rzut stereograficzny zachowuje pole powierzchni? (1pt)

3. Rozważmy rzut ze sfery o promieniu R na walec opisany. Rzutujemy w kierunku prostopadłym do osi walca (i prostopadłym do jego powierzchni). Czy pole powierzchni obrazu górnej półkuli jest równe $\frac{3}{4}\pi$? Odpowiedź uzasadnić. (2pt)

4. Odległość ze Skarżyska-Kamiennej do Krakowa jest równa około 154 km. Jak głeboko przejdzie pod ziemią tunel wykopany w prostej linii? (4pt)

5. Mamy mapę w skali 1:100 000. Z punktu A do B jest na mapie dokładnie 4,2 cm. Punkt A jest na wysokości 1200 m., a punkt B na wysokości 3.500 m. Pod jakim kątem widać punkt B z punktu A? Podać tangens tego kąta. (3pt)

6. Drzewo ma wysokość 28 m. Z tego drzewa widać sam czubek wieży kościoła w miasteczku. Wieża ma 70 m. wysokości. Jak daleko jest do miasteczka? (8pt)

7. Badano korelację płci i uzdolnień matematycznych. Zebrano 200 odpowiedzi:
– 117 mężczyzn,
– 83 kobiety,
– 20 jest uzdolnionych matematycznie,
– 180 nie jest uzdolnionych matematycznie.
Okazało się, że 13 kobiet jest uzdolnionych matematycznie. Stosując test χ^2 na poziomie istotności 5% (wartość krytyczna dla $df = 1$ wynosi 3.841) stwierdzić, czy możemy odrzucić hipotezę, że cechy nie są skorelowane. (6pt)

8. Patrzymy na wieżowiec z punktów A i B. Punkty A, B i wieżowiec są położone na jednej prostej. Odległość od A do B wynosi 190 m. Z punktu A widać wieżowiec pod kątem 11,5 stopnia, a z punktu B pod kątem 28,1 stopni. Jak wysoki jest wieżowiec? (4pt)

9. Badamy dwie cechy X i Y. Otrzymaliśmy wyniki

X	3	6	6
Y	1	1	7

Znaleźć współczynniki korelacji liniowej $Y = a + cX$ oraz $X = c + dY$. (6pt)

10. Prowadzono badania nad pająkami: zbadaliśmy 100 pająków. Przez X oznaczano długość odwłoka (w milimetrach), przez Y długość odnóży. Otrzymano dane
– $\sum X = 534$
– $\sum Y = 1\,278$
– $\sum X^2 = 3\,568$
– $\sum Y^2 = 16\,733$
– $\sum XY = 6\,335$.

Obliczyć współczynnik korelacji Pearsona r. (4pt)

11. Współczynik korelacji Pearsona r dla pewnych cech X i Y wynosi $0,91$. Czy należy sie spodziewać, że im większa wartość X tym większa wartość Y. Jeśli nie, to czego się trzeba spodziewać? (1pt)

12. Współczynik korelacji Pearsona r dla pewnych cech X i Y wynosi $-0,21$. Czy należy sie spodziewać, że im większa wartość X tym większa wartość Y. Jeśli nie, to czego się trzeba spodziewać? (1pt)

Grupa B

1. Badano korelację płci i uzdolnień muzycznych. Zebrano 200 odpowiedzi:
– 112 mężczyzn,
– 88 kobiety,
– 60 jest uzdolnionych muzycznie,
– 140 nie jest uzdolnionych muzycznie.
Okazało się, że 33 kobiety są uzdolnione muzycznie. Stosując test χ^2 na poziomie istotności 5% (wartość krytyczna dla $df = 1$ wynosi 3.841) stwierdzić, czy możemy odrzucić hipotezę, że cechy nie są skorelowane. (6pt)

2. Badamy dwie cechy X i Y. Otrzymaliśmy wyniki

X	5	8	8
Y	3	9	3

Znaleźć współczynniki korelacji liniowej $Y = a + cX$ oraz $X = c + dY$. (6pt)

3. Prowadzono badania nad pająkami: zbadaliśmy 100 pająków. Przez X oznaczano długość odwłoka (w milimetrach), przez Y długość odnóży. Otrzymano dane
– $\sum X = 434$
– $\sum Y = 1\,178$
– $\sum X^2 = 3\,468$
– $\sum Y^2 = 15\,733$
– $\sum XY = 6\,105$.

Obliczyć współczynnik korelacji Pearsona r. (4pt)

4. Współczynik korelacji Pearsona r dla pewnych cech X i Y wynosi $-0,91$. Czy należy sie spodziewać, że im większa wartość X tym większa wartość Y. Jeśli nie, to czego się trzeba spodziewać? (1pt)

5. Współczynik korelacji Pearsona r dla pewnych cech X i Y wynosi $0,21$. Czy należy sie spodziewać, że im większa wartość X tym większa wartość Y. Jeśli nie, to czego się trzeba spodziewać? (1pt)

6. Patrzymy na wieżowiec z punktów A i B. Punkty A, B i wieżowiec są położone na jednej prostej. Odległość od A do B wynosi 110 m. Z punktu A widać wieżowiec pod kątem 13,5 stopnia, a z punktu B pod kątem 31,1 stopni. Jak wysoki jest wieżowiec? (4pt)

7. Drzewo ma wysokość 17 m. Z tego drzewa widać sam czubek wieży kościoła w miasteczku. Wieża ma 60 m. wysokości. Jak daleko jest do miasteczka? (8pt)

8. Odległość ze Skarżyska-Kamiennej do Rzeszowa jest równa około 174 km. Jak głeboko przejdzie pod ziemią tunel wykopany w prostej linii? (4pt)

9. Mamy mapę w skali 1:100 000. Z punktu A do B jest na mapie dokładnie 5,2 cm. Punkt A jest na wysokości 1800 m., a punkt B na wysokości 3.100 m. Pod jakim kątem widać punkt B z punktu A: podać tangens tego kąta? (3pt)

10. Dany jest trójkąt na powierzchni Ziemi. Suma kątów wynosi 181 stopni. Podać jego powierzchnię. (2pt)

11. Czy przekształcenie Mercatora zachowuje kąty? (1pt)

12. Rozważmy rzut ze środka Ziemi na płaszczyznę styczną w punkcie N25E34. Czy obraz równika jest prostą? Odpowiedź uzasadnić. (2pt)

15 Egzamin poprawkowy

GRUPA A

2pt A1 Czy funkcja $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3} & \text{gdy } 0 < x < 5 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{array} \right\}$ może być rozkładem pewnej zmiennej losowej X? Jeśli tak, to obliczyć $P(X > 1)$.

2pt A2 Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w 5 rzutach kostką cowyżej 4 razy wypadnie piątka?

6pt A3 Gramy w następującą grę. Raz rzucamy kostką i obliczamy punkty w następujący sposób:
0pt, gdy wypadnie na kostce 1 lub 2 ;
2pt, gdy wypadnie na kostce 3, 4 lub 5;
5pt, gdy na kostce wypadnie 6.
Zmienna losowa X jest równa ilości punktów. Przedstaw rozkład zmiennej losowej X, oblicz jej wartość oczekiwaną i wariancję.

3pt B1 Na podstawie zabranych 20 pomiarów długości łapy królika określiliśmy 95%-przedział ufności średniej w populacji: wyniósł on 33cm ± 2,1cm. Ile pomiarów trzeba wykonać aby można było określić średnią 10 razy dokładniej, tj. z dokładnością do 0,21cm?

5pt B2 Wiadomo, że średnia długość łapy dzięcioła zielonego wynosi 3,7cm z odchyleniem standardowym 0.8 cm. W lesie Radziejewskim leśnik zmierzył łapy u 15 dzięciołów. Otrzymał średnią 3.9cm. Czy może twierdzić, że dzięcioły w jego lesie mają inną średnia długość łapy? (Zastosować test dwustronny o istotności 10%.)

2pt B3 Niech X będzie zmienną o rozkładzie normalnym, z wartością oczekiwaną równą 28 i odchyleniu standardowym równym 5. Oblicz prawdopodobieństwo, że $30 < X < 35$.

6pt C1 Badano korelację płci i upodobań muzycznyh. Zebrano 300 odpowiedzi: 86 mężczyzn, 214 kobiet, 68 lubi rap, 232 nie lubi rapu. Zakładając, że nie ma korelacji pomiędzy płcią a upodobaniami muzycznymi podać wartości oczekiwane ilości kobiet i mężczyzn lubiących rap. Okazało się, że tylko 42 kobiety lubią rap. Stosując test χ^2 na poziomie istotności 5% (wartość krytyczna dla $df = 1$ wynosi 3.841) stwierdzić, czy możemy odrzucić hipotezę, że cechy nie są skorelowane.

1pt C2 Badano dwie cechy X i Y, przy czym dysponowano mała ilością danych. Obliczono współczynnik korelacji Pearsona $r = 0,28$. Czy można twierdzić, że cechy są skorelowane? Jakiego typu zależności należy sie spodziewać.

3pt C3 Obliczyć współczynnik Pearsona dla danych
X: 3, 7, 4, 9
Y: 5, 9, 6, 11

2pt D1 Patrzymy na wieżowiec z punktów A i B. Punkty A, B i wieżowiec są położone na jednej prostej. Odległość od A do B wynosi 80 m. Z punktu A widać wieżowiec pod kątem 35,5 stopnia, a z punktu B pod kątem 49,1 stopni. Jak wysoki jest wieżowiec?

6pt D2 Podóżnik znajdował się na równoleżniku N80. Przeszedł dokładnie 30 km na północ, 30 km na zachód, 30 km na południe i 30 km na wschód. Jak daleko ma do punktu wyjścia?
2pt D3 Mamy trójkąt geodezyjny położony na półkuli północnej. Jaka jest maksymalna suma jego kątów.

GRUPA B

2pt A1 Czy funkcja $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} & \text{gdy } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{array} \right\}$ może być rozkładem pewnej zmiennej losowej X? Jeśli tak, to obliczyć $P(X < 1)$.

3pt A2 Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w 6 rzutach kostką conajmniej 5 razy wypadnie trójka?

6pt A3 Gramy w następującą grę. Raz rzucamy kostką i obliczamy punkty w następujący sposób:
0pt, gdy wypadnie na kostce 1, 2 lub 3;
1pt, gdy wypadnie na kostce 4 lub 5;
3pt, gdy na kostce wypadnie 6.
Zmienna losowa X jest równa ilości punktów. Przedstaw rozkład zmiennej losowej X, oblicz jej wartość oczekiwaną i wariancję.

3pt B1 Na podstawie zabranych 10 pomiarów długości łapy królika określiliśmy 95%-przedział ufności średniej w populacji: wyniósł on 31cm ± 3,2cm. Ile pomiarów trzeba wykonać aby można było określić średnią 10 razy dokładniej, tj. z dokładnością do 0,32cm?

5pt B2 Wiadomo, że średnia długość łapy dzięcioła zielonego wynosi 3,2cm z odchyleniem standardowym 0.5 cm. W lesie Radziejewskim leśnik zmierzył łapy u 15 dzięciołów. Otrzymał średnią 2.9cm. Czy może twierdzić, że dzięcioły w jego lesie mają inną średnia długość łapy? (Zastosować test dwustronny o istotności 1%.)

2pt B3 Niech X będzie zmienną o rozkładzie normalnym, z wartością oczekiwaną równą 18 i odchyleniu standardowym równym 2,5. Oblicz prawdopodobieństwo, że $20 < X < 23$.

6pt C1 Badano korelację płci i upodobań muzycznych. Zebrano 400 odpowiedzi: 186 mężczyzn, 214 kobiet, 138 lubi rap, 262 nie lubi rapu. Zakładając, że nie ma korelacji pomiędzy płcią a upodobaniami muzycznymi podać wartości oczekiwane ilości kobiet i mężczyzn lubiących rap. Okazało się, że tylko 53 kobiety lubią rap. Stosując test χ^2 na poziomie istotności 5% (wartość krytyczna dla $df = 1$ wynosi 3.841) stwierdzić, czy możemy odrzucić hipotezę, że cechy nie są skorelowane.

1pt C2 Badano dwie cechy X i Y, przy czym dysponowano mała ilością danych. Obliczono współczynnik korelacji Pearsona $r = -0,23$. Czy można twierdzić, że cechy są skorelowane? Jakiego typu zależności należy sie spodziewać.

3pt C3 Obliczyć współczynnik Pearsona dla danych
X: 3, 3, 0, 0
Y: 2, 7, 2, 7

2pt D1 Patrzymy na wieżowiec z punktów A i B. Punkty A, B i wieżowiec są położone na jednej prostej. Odległość od A do B wynosi 100 m. Z punktu A widać wieżowiec pod kątem 25,5 stopnia, a z punktu B pod kątem 39,1 stopni. Jak wysoki jest wieżowiec?

6pt D2 Podóżnik znajdował się na równoleżniku N78. Przeszedł dokładnie 40 km na północ, 40 km na zachód, 40 km na południe i 40 km na wschód. Jak daleko ma do punktu wyjścia?
2pt D3 Mamy trójkąt geodezyjny położony na półkuli południowej. Jaka jest maksymalna suma jego kątów.

16 Jak przygotować pracę zaliczeniową

Opracowanie danych

1. Opis zagadnienia:
•Np. badamy ceny mleka „łaciatego” w małych sklepach i supermarketach.

2. Zestawienie danych: obliczenie średniej i wariancji / odchylenia standartowego w próbach:
•Np. zbieramy dane X_1 w $n_1 = 25$ małych sklepach i X_2 w $n_2 = 10$ supermarketach. Obliczamy $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, s_1 i s_2 w próbach.

3. Przedziały ufności liczone dla średniej ceny:
•95%-przedział ufności $\overline{X}_1 \pm 1.96\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}$ gdy próba jest duża lub liczony za pomocą wartości krytycznych rozkładu t-Studenta ($df = n_1 - 1$) gdy próba jest mała tak jak w naszym przykładzie. To samo dla $\overline{X}_2$.
99%-przedział ufności – tjw.

Testowanie hipotez

4. Hipoteza zerowa
•Ceny w małych sklepach i supermarketach są takie same.

5. Hipoteza alternatywna
•Ceny w supermarketach są niższe.

6. Zmienna losowa $Y = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$
•Różnica średnich z zebranych danych. Zmienna marozkład t-Studenta z $df = n_1 + n_2 - 2 = 33$ stopniami swobody, lub jeśli danych jest dużo ma rozkład normalny.

7. Estymacja odchylenia standardowego σ_Y:
1) zakładamy, że nie ma różnicy między wariancjami w populacjach

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

2) nie zakładamy, że nie ma różnicy między wariancjami w populacjach

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

8. Ustalamy obszar krytyczny $t = \frac{Y}{\sigma_Y}$ dla różnych poziomów istotmości (odczytujemy z tablicy wartości krytyczne):
•W naszym przykładzie stosujemy test jednostronny np. dla poziomu istotności 5% i 1%.

9. Podejmujemy decyzję o odrzuceniu lub nie hipotezy zerowej.

10. W przypadku odrzucenia hipotezy zerowej szacujemy błąd I rodzaju:
•Szukamy najmniejszego poziomu istotności, przy którym odrzucimy hipotezę zerową

11. Dla porównania testujemy hipotezę zakładając, że Y ma rozkład normalny i obliczamy bład I rodzaju w przypadku odrzucenia hipotezy zerowej.
•Przy dużej ilości danych powinniśmy otrzymać zbliżony obszar krytyczny, a błąd I rodzaju będzie można obliczyć dużo dokładniej.

Zmienna t i test Studenta

Dane jest N niezależnych pomiarów $X_1, X_2, \ldots X_N$. Przypuśćmy że $1 < N \leq 30$. Zakładamy, że są to pomiary pewnej zmiennej losowej X o rozkładzie normalym. Testujemy hipotezę $EX = \mu$.

Krok 1. Obliczamy średnią

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{N} .$$

Krok 2. Na podstawie danych obliczamy odchylenie standardowe zmiennej X:

$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\Sigma X_i^2 - \frac{1}{N}(\Sigma X_i)^2}{N-1}} .$$

Krok 3. Obliczamy odchylenie standardowe zmiennej $\bar{X}$:

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{N}} .$$

Krok 4. Obliczamy zmienną t wzorem

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} .$$

Krok 5. Sprawdzamy w tablicy czy wartość bezwzględna $|t|$ przekracza wartość krytyczną dla $N-1$ stopni swobody i wybranego poziomu istotności. Jeśli tak, to odrzucamy hipotezę $EX = \mu$.

17 Przykład pracy zaliczeniowej (testowanie hipotez)

1. Zbadaliśmy grupę N=80 meżczyzn oraz grupę K=75 kobiet. Poprosiliśmy o odpowiedz na pytania: - Jaki jest Pani/Pana wzrost? - Czy jest Pani/Pan zadowolona/y ze swojego wzrostu?
2. Na pierwsze pytanie uzyskaliśmy w dwóch grupach niastepujące wyniki (178,173,...) oraz (167,181,...).
3. Estymator średniego wzrostu dał wartość Średnia z pierwszego: ... Średnia z drugiego: ...
4. Estymator wariancji: ...
5. 90% przedział ufności średniej dla pierwszej grupy: ...
95% przedział ufności średniej dla pierwszej grupy: ...
90% przedział ufności średniej dla drugiej grupy: ...
95% przedział ufności średniej dla drugiej grupy: ...
6. Teraz np. obliczenia dla próbek mniejszych np. N=10,20,30,40; M=10,20,30,40 liczone wg. testu t-Studenta.
7. Porównanie z wynikami liczonymi dla dużej próby z normalnego. Jak zwęża się przedział ufności w miarę wzrostu próbki?
8. Test dla hipotezy: średnia dla kobiet = *coś tam*, przeciw alternatywie: średnia > *coś tam*.
9. Test dla hipotezy: średnia dla mężczyzn = *coś tam*, przeciw alternatywie: średnia < *coś tam*.
10. Estymator dla różnicy średnich (duże próbki, przyjmujemy, że wariancja znana i ta sama w obu).
11. Przedział ufności dla różnicy średnich.
12. Teraz drugie pytanie: wyniki ...
13. Estymator frakcji zadowolonych w obu grupach.
14. Test hipotezy: frakcje zadowolonych w obu grupach są równe przeciw alternatywie: więcej zadowolonych ze swego wzrostu jest kobiet. Test na poziomie istotności 5% oraz 10%.

18 Przykład pracy zaliczeniowej (korelacja)

1. Zbadaliśmy 80 grupę meżczyzn. Poprosiliśmy o odpowiedź na pytania: - Jaki jest Pana wzrost? - Jaka jest Pana waga?
2. Na pierwsze pytanie uzyśkalismy w nastepujące wyniki (178,173,...) oraz (67,81,...)
3. Estymator średniej - średnia wzrostu: ... - średnia waga
4. Estymator wariancji: ...

5. 90% przedział ufności średniej wzrostu: ... 95% przedział ufności średniej wzrostu: ...
90% przedział ufności średniej wagi: ... 95% przedział ufności średniej wagi: ...
6. Obliczamy wspólczynnik korelacji.
7. Znajdujemy funkcję liniową najlepiej opisującą zależność wagi od wzrostu: waga= a+b*wzrost.
8. Robimy wykres tej funkcji i zaznaczamy na płaszczyznę punkty odpowiadające danym wyjsciowym.
9. Wyznaczamy współczynnik korelacji.
10. Czy korelacja jest istotna?
11. Czy są pary danych istotnie odbiegające od tej zależności?

W przypadku badania cech jakościowych stosujemy test χ^2.

8 październik 2011