53.3. Znaleźć jakiekolwiek przekształcenie rzutowe płaszczyzny przeprowadzające okrąg $x^2 + y^2 = 1$ na siebie oraz:
(a) punkt $(0,0)$ w punkt $(1/2,0)$;
(b) prostą $x = 2$ na prostą w nieskończoności.

53.4. Znaleźć jakiekolwiek przekształcenie rzutowe przestrzeni rzutowej przeprowadzające daną kwadrykę na odpowiadającą kwadrykę:
(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \mapsto xy - z^2 = 1$;
(b) $xy = z \mapsto x^2 + y^2 - z^2 = 1$; (c) $xy = z^2 \mapsto y = x^2$.

53.5. Wyznaczyć maksymalny wymiar płaszczyzn zawierających się w kwadryce:
(a) $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_n^2 = 1$;
(b) $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_n^2 = x_n$.

53.6. Udowodnić, że nad ciałem liczb zespolonych dowolne przekształcenie rzutowe ma co najmniej jeden punkt stały.

53.7. Wykazać, że w rzeczywistej przestrzeni rzutowej wymiaru parzystego dowolne przekształcenie rzutowe ma co najmniej jeden punkt stały.

53.8. Udowodnić, że jeśli przekształcenie rzutowe n-wymiarowej przestrzeni rzutowej nad ciałem nieskończonym ma skończoną liczbę punktów stałych, to ich liczba jest nie większa od $n + 1$.

53.9. Udowodnić, że dla każdego skończonego zbioru punktów w przestrzeni rzutowej nad ciałem nieskończonym istnieje mapa afiniczna $\mathbb{A}_0$, która zawiera te punkty.

53.10. Wykazać, że dowolną $(k-1)$-wymiarową podprzestrzeń w $\mathbb{P}^n$ można pokryć k mapami afinicznymi, ale nie można jej pokryć mniejszą liczbą takich map.

53.11. Znaleźć liczbę punktów w n-wymiarowej przestrzeni rzutowej nad ciałem q-elementowym.

53.12. Wyznaczyć liczbę k-wymiarowych podprzestrzeni w n-wymiarowej przestrzeni rzutowej nad ciałem q-elementowym.

53.13. Podać liczbę przekształceń rzutowych w n-wymiarowej przestrzeni rzutowej nad ciałem q-elementowym.

53.14. Niech M_1 i M_2 będą nie przecinającymi się płaszczyznami w $\mathbb{P}^n$, a L_1 i L_2 nie przecinającymi się płaszczyznami o tych samych wymiarach. Udowodnić, że istnieje przekształcenie rzutowe przeprowadzające M_1 w L_1 i M_2 w L_2.

53.15. Wykazać, że jeśli przekształcenie rzutowe przeprowadza pewną mapę afiniczną w siebie, to indukuje na tej mapie przekształcenie afiniczne.

53.16. Udowodnić, że każde bijektywne przekształcenie dwuwymiarowej płaszczyzny rzutowej, przeprowadzające proste na proste i zachowujące *dwustosunek czterech punktów* na każdej prostej, jest przekształceniem rzutowym ([1]).

Zadanie o płaszczyźnie rzutowej

53.17. Udowodnić, że za pomocą odpowiedniego przekształcenia rzutowego można przeprowadzić dowolne cztery proste, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie, na dowolne inne cztery proste o tej samej własności.

53.18. Wykazać, że istnieje przekształcenie rzutowe płaszczyzny zachowujace dany trójkąt i przeprowadzające dany punkt wewnętrzny tego trójkąta na dowolny inny punkt wewnętrzny.

53.19. Wykazać, że istnieje przekształcenie rzutowe płaszczyzny zachowujące okrąg i przeprowadzające dany punkt wewnętrzny tego okręgu na dowolny inny punkt wewnętrzny.

53.20. Udowodnić, korzystając z przekształceń rzutowych, że za pomocą samej linijki nie można wyznaczyć środka danego okręgu.

53.21. Udowodnić, korzystając z przekształceń rzutowych, że odcinki łączące wierzchołki trójkąta z punktami przeciwległych boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy te punkty są punktami styczności pewnej elipsy wpisanej w trójkąt.

53.22. Rozpatrzyć obraz przedstawiający aleję. Odległość od pierwszego drzewa alei do linii horyzontu jest równa l, a odległość między drzewami k i $k+1$ jest równa a_k. Wyrazić:

(a) a_3 za pomocą a_1 i a_2; **(b)** a_2 za pomocą l i a_1.

Założenie: ciało bazowe jest algebraicznie domknięte lub K=R.

53.23. Przekształcenie rzutowe płaszczyzny ([2]) nazywa się *homologią*, jeśli wszystkie punkty pewnej prostej (*osi homologii*) są jej punktami stałymi i jeśli zachowuje ono wszystkie proste przechodzące przez pewien punkt (*środek homologii*) ([3]). Wykazać, że:

(a) istnieje tylko jedna homologia o zadanej osi P i zadanym środku $\tilde{\mathbf{o}}$, przekształcająca wybrany punkt $\tilde{\mathbf{a}} \neq \tilde{\mathbf{o}}$, $\tilde{\mathbf{a}} \notin P$, w dany punkt $\tilde{\mathbf{a}}' \neq \tilde{\mathbf{o}}$, $\tilde{\mathbf{a}}' \notin P$, należący do prostej $\tilde{\mathbf{o}}\tilde{\mathbf{a}}$;

(b) każde przekształcenie rzutowe płaszczyzny jest iloczynem dwóch homologii.

([1]) Bijektywne przekształcenie przestrzeni rzutowej przeprowadzające dowolną prostą na prostą nazywa się *kolineacją rzutową* (zob. też zadanie 39.46). Twierdzenie w zadaniu jest „słabą" wersją twierdzenia mówiącego, że *każda kolineacja płaszczyzny rzutowej jest przekształceniem rzutowym*. Zob. E. Marchow, *Geometria rzutowa*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2002, s. 94 (*przyp. tłum.*).

([2]) Nie będące tożsamością (*przyp. tłum.*).

([3]) Drugi warunek definicji jest zbyteczny, ponieważ, przy założeniu tylko pierwszego, można udowodnić, że proste łączące punkty (nie leżące na osi homologii) płaszczyzny rzutowej z ich obrazami przecinają się w jednym punkcie — jest to właśnie środek homologii (*przyp. tłum.*).

53.24. Wykazać, że istnieje tylko jedno przekształcenie rzutowe płaszczyzny zachowujace okrąg $x^2 + y^2 = 1$ i przeprowadzające trzy ustalone punkty na tym okręgu na trzy wybrane punkty należące do tego okręgu.

53.25 (twierdzenie Desargues'a). Udowodnić, że jeśli proste $\widetilde{\mathbf{a}}\widetilde{\mathbf{a}}_1$, $\widetilde{\mathbf{b}}\widetilde{\mathbf{b}}_1$, $\widetilde{\mathbf{c}}\widetilde{\mathbf{c}}_1$ przecinają się w jednym punkcie, to punkty przecięcia prostych $\widetilde{\mathbf{a}}\widetilde{\mathbf{b}}$ z $\widetilde{\mathbf{a}}_1\widetilde{\mathbf{b}}_1$, $\widetilde{\mathbf{b}}\widetilde{\mathbf{c}}$ z $\widetilde{\mathbf{b}}_1\widetilde{\mathbf{c}}_1$, $\widetilde{\mathbf{a}}\widetilde{\mathbf{c}}$ z $\widetilde{\mathbf{a}}_1\widetilde{\mathbf{c}}_1$ leżą na jednej prostej([1]).

53.26 (twierdzenie Pascala). Udowodnić, że punkty przecięcia przeciwległych boków sześciokąta wpisanego w okrąg ([2]) leżą na jednej prostej.

53.27 (twierdzenie Pappusa). Udowodnić, że punkty przecięcia przeciwległych boków sześciokąta, którego wierzchołki znajdują się kolejno na dwóch zadanych prostych, leżą na jednej prostej.

53.28. Niech P_1, P_2, P_3, P_4 będą prostymi na płaszczyźnie przechodzącymi przez punkt $\widetilde{\mathbf{o}}$ i niech P będzie taką prostą, że $\widetilde{\mathbf{o}} \notin P$. Wykazać, że dwustosunek czwórki punktów przecięcia prostych P_1, P_2, P_3, P_4 z prostą P nie zależy od wyboru P (nazywa się go *dwustosunkiem czterech prostych* P_1, P_2, P_3, P_4).

53.29. Niech f będzie niezdegenerowaną formą dwuliniową na $(n+1)$-wymiarowej przestrzeni wektorowej V. Każdej $(k+1)$-wymiarowej podprzestrzeni $U \subset V$ przyporządkujmy $(n-k)$-wymiarową podprzestrzeń

$$U^{\perp} = \{\mathbf{y} \in V \mid f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \text{ dla każdego } \mathbf{x} \in U\}.$$

Oznacza to, że w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$ zostało określone odwzorowanie K_f, które każdej k-wymiarowej płaszczyźnie przyporządkowuje $(n-k-1)$-wymiarową płaszczyznę (*korelacja względem formy* f).
Wykazać, że:
(a) korelacja zachowuje *relację incydencji*, tzn.

$$U_1 \subset U_2 \Leftrightarrow K_f(U_1) \supset K_f(U_2);$$

(b) jeśli forma f jest symetryczna lub antysymetryczna, to korelacja K_f jest inwolucją, tzn.

$$K_f(K_f(U)) = U;$$

(c) złożenie korelacji z przekształceniem rzutowym jest korelacją;

([1]) Dowód tego twierdzenia (jak i następnych) może okazać się zbyt trudny, warto więc zapoznać się napierw z bardziej poglądowymi dowodami tych twierdzeń (np.: H. S. M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa 1967, rozdz. 14; lub pozycja cytowana przy zadaniu 53.16) (*przyp. tłum.*).

([2]) Twierdzenie to należy do geometrii rzutowej, więc jest też prawdziwe, jeśli zamiast okręgu weźmiemy dowolną stożkową — na płaszczyźnie rzutowej mamy tylko jeden rodzaj stożkowej. Pascal udowodnił to twierdzenie, mając 16 lat (*przyp. tłum.*).

(d) każda korelacja jest złożeniem ustalonej korelacji z pewnym przekształceniem rzutowym.

53.30. Udowodnić, że każda korelacja prostej rzutowej przekształca punkty tej prostej w taki sam sposób, jak pewne przekształcenie rzutowe.

53.31. Wykazać, że korelacja prostej rzutowej $\mathbb{P}^1$ zachowuje dwustosunek punktów.

53.32. Wykazać, że korelacja na płaszczyźnie rzutowej względem formy symetrycznej f przeprowadza każdy punkt krzywej $f(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0$ na styczną do tej krzywej, przechodzącą przez ten punkt.

53.33. Sformułować twierdzenie (*twierdzenie Brianchona* ([1])) otrzymane z twierdzenia Pascala (zob. zadanie 53.26) przez zastosowanie korelacji.

53.34. Za pomocą pojęcia korelacji wykazać, że punkty przecięcia stycznych do danego okręgu, poprowadzonych przez końce wszystkich cięciw, które przechodzą przez ustalony punkt, leżą na jednej prostej.

([1]) Twierdzenie Brianchona jest twierdzeniem dualnym do twierdzenia Pascala. W twierdzeniu dualnym zamieniamy słowa: *punkt* i *prosta*; *leży na* i *przechodzi przez*; *współliniowe* i *przecinają się* itp. (*przyp. tłum.*).