GAL*, konspekt wykładów: Formy 2-liniowe [Kos roz.1 §4], [Tor VII]

10.4.2014

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Przekształcenia 2-liniowe

1.1 Przekształcenia dwuliniowe $\phi : V_1 \times V_2 \to V_3$. Przykłady:
– $V \times V^* \to \mathbb{K}$,
– A algebra nad $\mathbb{K}$, mnożenie:$A \times A \to A$
  – np, $A = L(V, V)$,
  – np. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{C}$.
– składanie przekształceń $L(W_1, W_2) \times L(W_2, W_3) \to L(W_1, W_3)$,
– mnożenie funkcji spełniających różne warunki, np $C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$.

1.2 Przykład: Dane $1 < p < \infty$, niech ℓ^p oznacza zbiór ciągów sumowalnych w p-tej potędzie (tzn $\sum_{i=1}^\infty |a_i|^p < \infty$). Dla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mamy $\ell^p \times \ell^q \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $\phi((a_i), (b_j)) = \sum_{i=1}^\infty a_i b_j$ (zbieżność wynika z nierówności Höldera).

1.3 Dane bazy $A = \{\alpha_i\}_{i=1,\dots,n}$ przestrzeni V_1, $B = \{\beta_j\}_{i=1,\dots,m}$ przestrzeni V_2. Przekształcenie dwuliniowe $\phi : V_1 \times V_2 \to V_3$ wyznaczone jest przez wartości na parach wektorów bazowych $\phi(\alpha_i, \beta_j)$.

1.4 Macierz przekształcenia dwuliniowego $\phi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ w bazach to $M(\phi)_{A,B} \in M(n \times m, \mathbb{K})$ taka, że $(M(\phi)_{A,B})_{i,j} = \phi(\alpha_i, \beta_j)$.

1.5 Indukowane przekształcenie $\phi^\# : V_2 \to V_1^*$ zadane wzorem $\phi^\#(w) = \phi(\,\cdot\,, w)$. W bazach: $M(\phi^\#)_B^{A^*} = M(\phi)_{A,B}$.

1.6 Jeśli $M = M(\phi)_{st,st} \in M(n \times m, \mathbb{K})$ jest macierzą $\phi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$ w bazach standardowych, to $\phi(X, Y) = X^T M Y$ (wektor zapisujemy jako kolumnę).

2 Formy 2-liniowe

Założenie $char(\mathbb{K}) \neq 2$.

2.1 Dla $\phi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ transformacja macierzy $M(\phi)$ przy zmianie baz.

2.2 Jeśli $V_1 = V_2$, to $\mathbb{Q}$ nazywamy formą dwuliniową.

2.3 Forma dwuliniowa $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ jest niezdegenerowana jeśli:
(i) $\forall w \in V - \{0\}\ \exists v \in V\ \phi(v, w) \neq 0$
(ii) $\forall v \in V - \{0\}\ \exists w \in V\ \phi(v, w) \neq 0$
Jeśli $\dim(V) < \infty$ to (i) jest równoważne (ii) i jest równoważne
(iii) $M(\phi)$ jest macierzą niezdegenerowaną.

2.4 Ćwiczenie: wskazać formę 2-liniową, dla której (i) i (ii) nie są równoważne

2.5 Powyższe punkty są równoważne:
(i) $\Leftrightarrow$ (i'): indukowane przekształcenie $\phi^{\#} : V \to V^*$ zadane wzorem $\phi^{\#}(w) = \phi(\,\cdot\,, w)$ jest monomorfizmem.
(ii) $\Leftrightarrow$ (ii'): indukowane przekształcenie $\phi^{\#'} : V \to V^*$ zadane wzorem $\phi^{\#'}(v) = \phi(v,\,\cdot\,)$ jest monomorfizmem.

2.6 Formy symetryczne i antysymetryczne.

2.7 Przykłady:
– $V = C([0,1])$, dana funkcja $\rho(x) \in V$ (gęstość) $\phi_\rho(f,g) = \int_0^1 \rho(x)f(x)g(x)dx$ – symetryczna
– V tjw, dane $x_0 \in [0,1]$, $\phi_{\delta_{x_0}}(f,g) = f(x_0)g(x_0)$
– $V = C_0^1(\mathbb{R})$: $\phi(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx$ – antysymetryczna.
– $\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$

2.8 Macierz formy, zamiana bazy a relacja **kongruencji** (porównaj z relacją podobieństwa)

$$(A \sim A') \;\Leftrightarrow\; \exists C \text{ odwracalna } : \; A' = C^T A C\,.$$

2.9 Rozkład formy na sumę symetrycznej i antysymetrycznej.

2.10 Dla symetrycznej bądź antysymetrycznej formy dwuliniowej: Dopełnienie ortogonalne $W^\perp$ do podprzestrzeni W.

2.11 Dla każdej 2-liniowej symetrycznej bądź antysymetrycznej formy mamy:
– $W \subset (W^\perp)^\perp$
– $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$
– $\dim(V) \leq \dim(W) + \dim(W^\perp)$

2.12 Dla niezdegenerowanej formy mamy, $\dim(V) < \infty$
– $W = (W^\perp)^\perp$
– $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$

2.13 Ćwiczenie. Udowodnić analogiczne własności dla przekształcenia dwuliniowego. $\phi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ używając pojęcia anihilatora: dla $A \subset V_1$ definiujemy $anh(A) = \{w \in V_2 \,|\, \forall v \in A \; \phi(v,w) = 0\}$.

2.14 Rozkład przestrzeni na sumę prostą ortogonalną $A \overset{\perp}{\oplus} B$ (oznaczaną też $V = A \dot{\perp} B$).

2.15 Każdą przestrzeń z symetryczną bądź antysymetryczna formą 2-liniową można przedstawić jako $V = U \overset{\perp}{\oplus} W$, gdzie U jest całkowicie zdegenerowana (tzn $\phi_{|U} = 0$), oraz W jest niezdegenerowana. Przedstawienie to jest jednoznaczne w następującym sensie: Jeśli $V = U \overset{\perp}{\oplus} W = U' \overset{\perp}{\oplus} W'$, to $U = U'$ oraz istnieje izomorfizm $f : W \to W'$ taki, że dla $v, w \in W$ mamy $\phi(v,w) = \phi(f(v), f(w))$.
Dow: $U = V^\perp$, $W \simeq V/U$.

2.16 Załóżmy że ϕ jest symetryczna bądź antysymetryczna oraz niezdegenerowana na V, $\dim(V) < \infty$. Dana podprzestrzeń $W \subset V$ taka, że $\phi_{|W}$ jest niezdegenerowana. Wtedy $V = W \oplus W^{\perp}$ oraz $\phi_{|W^{\perp}}$ jest niezdegenerowana.

2.17 Ćwiczenie: znaleźć przykład (V, ϕ) nieskończonego wymiaru taki, że istnieje $W \subsetneq V$, $W^{\perp} = \{0\}$.

2.18 Załóżmy że ϕ jest antysymetryczna oraz niezdegenerowana $\dim(V) < \infty$. (Mówimy, że ϕ jest symplektyczna.) Wtedy $\dim(V)$ jest parzysty oraz istnieje baza V: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ taka, że macierz formy w tej bazie jest blokowa $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Ta baza nazywa się bazą symplektyczną lub Darboux.

3 Diagonalizacja, Kryterium Sylvestera

3.1 Wniosek z istnienia bazy symplektycznej: każda macierz antysymetryczna i niezdegenerowana jest kongruentna do macierzy $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, czyli postaci $C^T J C$.

3.2 Wniosek: wyznacznik macierzy antysymetrycznej jest kwadratem. Istnieją formuły wielomianowe pozwalające wyciągnąć pierwiastek: np

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{x12} & \mathrm{x13} & \mathrm{x14} \\ -\mathrm{x12} & 0 & \mathrm{x23} & \mathrm{x24} \\ -\mathrm{x13} & -\mathrm{x23} & 0 & \mathrm{x34} \\ -\mathrm{x14} & -\mathrm{x24} & -\mathrm{x34} & 0 \end{pmatrix} = (\mathrm{x12}\,\mathrm{x34} - \mathrm{x13}\,\mathrm{x24} + \mathrm{x14}\,\mathrm{x23})^2 .$$

(patrz Pfaffian).

3.3 Symetryczne formy 2-liniowe są wyznaczone przez formę kwadratową $v \mapsto \phi(v, v)$. Związek macierzy formy ze współczynnikami formy kwadratowej.

3.4 Załóżmy że ϕ jest symetryczna. Wtedy istnieje baza V, w której $M(\phi)$ jest diagonalna.

3.5 Metoda Jacobiego: załóżmy, że dla macierzy $M(\phi)$ minory główne Δ_1, Δ_2,... Δ_n są różne od zera. Wtedy istnieje baza $\mathbb{K}^n$, w której ϕ ma postać diagonalną z liczbami Δ_1, Δ_2/Δ_1,... Δ_n/Δ_{n-1} na przekątnej.

3.6 O relacji **kongruencji** c.d.:
– Każda macierz symetryczna jest kongruentna do macierzy diagonalnej.
– Jeśli $A \sim A'$ i $B \sim B'$ to $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$
– Macierz (a) jest kongruentna $(k^2 a)$ dla $k \neq 0$.
– Jeśli $a + b \neq 0$, to macierz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ jest kongruentna do $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & ab(a+b) \end{pmatrix}$. (Ćwiczenie).

3.7 Ćwiczenie (być może trudne): sklasyfikować formy dwuliniowe symetryczne $\mathbb{Q}^2$. Które macierze symetryczne 2×2 są kongruentne do macierzy jednostkowej?

3.8 Nad ciałem algebraicznie domkniętym każda niezdegenerowana macierz symetryczna jest kongruentna do macierzy $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.9 Twierdzenie o bezwładności: Jeśli ciało jest uporządkowane i każdy element > 0 jest kwadratem (np. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), to każda macierz symetryczna jest kongruentna do diagonalnej, a na przekątnej są tylko 1, –1 i 0. Ilości ,,1”, ,,0” i ,,–1” są jednoznacznie wyznaczone.
Dowód dla formy niezdegenerowanej: jeśli $k + l = k' + l' = n$ to albo $k + l' > n$ lub $k' + l > n$.

3.10 Równoważne sformułowanie: $(V, \phi) \simeq [\,1\,]^k \overset{\perp}{\oplus} [-1\,]^\ell \overset{\perp}{\oplus} [\,0\,]^m$.

3.11 W Twierdzeniu o bezwładności liczby k, l, m:
– liczba k jest róna wymiarowi maksymalnej podprzestrzeni, na której ϕ jest dodatnio określona,
– liczba l jest róna wymiarowi maksymalnej podprzestrzeni, na której ϕ jest ujemnie określona,
– $m = \dim(V^\perp)$.

3.12 Formy określone dodatnio i ujemnie.

3.13 Kryterium Sylwestera.

3.14 Ćwiczenie: wyznaczniki kolejnych minorów mają znaki jak poniżej. Jakiej postaci może być forma? a) $+0-$, b) $++\,0-$, c) $+-\,0+$, d) $++\,0-$, e) $+-\,0-$, itp.

3.15 Ćwiczenie: Czy możemy otrzymać ciąg znaków $++\,0+$?

3.16 Równoważne podejście. Znajdowanie współrzędnych, w których forma kwadratowa jest sumą kwadratów metodą Lagrange’a (uzupełnianie do pełnych kwadratów).

3.17 Ćwiczenie: Niech $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ będzie macierzą jednostkową. Dana niezdegenerowana macierz symetryczna $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Udowodnić, że macierz blokowa $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{K})$ jest kongruentna z $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

4 Przekształcenia zachowujące formę, ortogonalizacja Grama-Schmidta

4.1 Sygnatura formy $(V, \phi) \simeq [\,1\,]^k \overset{\perp}{\oplus} [-1\,]^\ell \overset{\perp}{\oplus} [\,0\,]^m$ to $k - l$.

4.2 Dane formy 2-liniowe symetryczne (V, ϕ) i (W, ψ). Przekształcenie $f : V \to W$ zachowuje formę, jeśli dla $v, w \in V$ mamy $\phi(v, w) = \psi(f(v), f(w))$. Macierzowo, jeśli $X = M(f)$ jest macierzą f (w pewnych bazach), to $X^T M(\psi) X = M(\phi)$.

4.3 Jeśli forma ϕ jest niezdegenerowana, to ϕ jest monomorfizmem. Jeśli $\dim V = \dim W < \infty$, to ϕ jest izomorfizmem.

4.4 Załóżmy, że ϕ jest niezdegenerowana, $\dim V < \infty$. Zbiór $G = \{f \in End(V) \ : \ f \text{ zachowuje } \phi\}$ jest grupą.
Macierzowo: $G = \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \ : \ X^T M(\phi) X = M(\phi)\}$.
Każdy element G spełnia $\det X = \pm 1$.

4.5 Jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oraz ϕ jest typu $(V, \phi) \simeq [\,1\,]^k \overset{\perp}{\oplus} [-1\,]^\ell$, to grupę przekształaceń zachowujących ϕ oznaczamy $O(k, \ell)$.

4.6 Szczególne przypadki

– $O(n,0)=O(n)=\{X\in M_{n\times n}(\mathbb{K})\ :\ X^TX=I\}$ grupa ortogonalna. Tu $X^{-1}=X$.

– $SO(n)=O(n)\cap SL_n(\mathbb{R})$, gdzie $SL_n(\mathbb{K})=\{X\in M_{n\times n}(\mathbb{K})\ :\ \det X=1\}$.

– będziemy także rozważać $O(1,3)=O(3,1)$.

Iloczyny skalarne, ortogonalizacja Grama–Schmidta

4.7 Iloczyn skalarny (naogół rozważany nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{Q}$), to forma dwuliniowa symetryczna niezdegenerowana, dodatnio określona, oznaczana przez (v,w), $\langle v,w\rangle$ lub $v.w$.

4.8 Diagonalizacja formy (metoda Jacobiego) a znajdowanie bazy ortogonalnej (ortogonalizacja Grama-Schmidta).

4.9 Dana baza $\mathcal{A}$. Ortogonalizacja G-S: $\beta_i=\alpha_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(\alpha_i,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j$, $\gamma_i=\frac{1}{\sqrt{(\beta_i,\beta_i)}}\beta_i$ to procedura

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & & \mathcal{B} & & \mathcal{C} \\ \text{dowolna baza} & \rightsquigarrow & \text{baza ortogonalna} & \rightsquigarrow & \text{baza ortonormalna.} \end{array}$$

Mamy $M(Id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ jest górnotrójkątna z jedynkami na przekątnej (bo $M(Id)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ jest taka), $M(Id)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ jest diagonalna, $M^{st}_{\mathcal{C}}\in O(n)$.

4.10 Przyjmując:

$$G=M^{st}_{\mathcal{A}}(I),\quad K=M^{st}_{\mathcal{C}}(I),\quad A=M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(I),\quad N=M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(I)$$

traktujemy ortogonalizację G-S jako algorytm pozwalający przedstawić dowolną macierz odwracalną G w postaci

$$G=K\cdot A\cdot N\,,$$

gdzie $K\in O(n)$, macierz A jest diagonalna z dodatnimi wyrazami, N górnotrójkątna z jedynkami na przekątnej:

$$\begin{array}{ccccc} G & & B & & K \\ \text{dowolna macierz} & \rightsquigarrow & B^TB \text{ jest diagonalna} & \rightsquigarrow & \text{macierz z } O(n) \end{array}$$

4.11 Ćwiczenie. Rozkład Iwasawy KAN jest jednoznaczny. Mamy bijekcję

$$O(n)\times(\mathbb{R}_+)^n\times\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}\to GL(\mathbb{R}^n)\,,$$

$$(K,A,N)\mapsto K\cdot A\cdot N\,.$$

(Tu $(\mathbb{R}_+)^n$ utoższamiamy ze zbiorem macierzy z wyrazami dodatnimi na przekątnej, $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ z macierzami górnotrójkątnymi z jedynkami na przekątnej.) Na przykład

$$GL(\mathbb{R}^2)\quad\simeq\quad O(2)\times(\mathbb{R}_+)^2\times\mathbb{R}\,.$$

4.12 Ćwiczenie:

$$SO(\mathbb{R}^3)\quad\simeq\quad\mathbb{P}^3(\mathbb{R})\,.$$

Kwadryki [Kos roz.5 §2-4, *tam jest bardzo dokładnie*]

4.13 Zbiory algebraiczne w $\mathbb{K}^n$ to zbiory opisane układami równań wielomianowch.

4.14 Przykąd: okrąg, hiperbola, parabola w $\mathbb{R}^2$.

4.15 Przykład. Dane trzy opisy zbioru $X = \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$:
1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0 \ \wedge \ y = 0\}$,
2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 = 0 \ \wedge \ y^2 = 0\}$,
3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 0\}$.
w 1) i 2) równania opisują ten sam zbiór także w $\mathbb{C}^2$, ale w 3) zbiór rozwiązań zespolonych jest większy.

Dla zbioru wielomianów $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ definiujemy

$$\langle f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} g_i f_i \ : \ g_i \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \right\} \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \, .$$

Mamy $\langle x^2 + y^2\rangle \subset \langle x^2, y^2\rangle \subset \langle x, y\rangle$. Dla $X \subset \mathbb{K}^n$ definiujemy zbiór wszystkich funkcji zerujących się na X

$$I(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \ : \ \forall x \in X \ f(x) = 0\} \, .$$

Tylko w przypadku pierszego opisu mamy $I(X) = \langle x, y\rangle$.

4.16 Wektor v jest izotropowy ze względu na formę ϕ jeśli $\phi(v,v) = 0$. Zbiory wektorów izotropowych w $\mathbb{K}^n$ to przykłady zbiorów algebraicznych. Z dokładnością do liniowej zamiany zmiennych każdy jest postaci

$$X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{j=k+1}^{k+\ell} x_j^2 = 0\} \, .$$

4.17 Przykłady $n = 2, 3$.

5 Kwardryki w $\mathbb{R}^n$ i w $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

5.1 Kwadryki afiniczne: Każda kwadryka afiniczna w $\mathbb{R}^n$ może być przekształceniem afinicznym sprowadzona do kwadryki opisanej równaniem:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{j=k+1}^{k+\ell} x_j^2 = \delta$$

$k + \ell \leq n$, $\delta = 0$ lub 1 albo

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{j=k+1}^{k+\ell} x_j^2 = x_{k+\ell+1}$$

$k + \ell < n$.

5.2 Przkłady. Hiperbola i parabola w $\mathbb{R}^2$: ich rzutowa równoważność z okręgiem, przecięcie z prostą w ∞.

5.3 Dlaczego kwadryki w $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ nazywają się stożkowymi.

5.4 Zbiory algebraiczne w $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ a zbiory opisane równaniami jednorodnymi w $\mathbb{K}^{n+1}$. Operacja ujednorodniania równania.

5.5 Afiniczne typy równoważności kwadryk w $\mathbb{R}^3$ i rzutowe typy. Zakładając, że po ujednorodnieniu otrzymujemy formę niezdegenierowaną mamy następujące typy:
- elipsoida (sfera) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, typ rzutowy $+++-$
- hiperboloida jednopowłokowa $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, typ rzutowy $++--$
- hiperboloida dwupowłokowa $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, typ rzutowy $+++-$
- paraboloida eliptyczna $x^2 + y^2 = z$, typ rzutowy $+++-$
- paraboloida hiperboliczna $x^2 - y^2 = z$, typ rzutowy $++--$
- zbiór pusty $x^2 + y^2 + z^2 = -1$, typ rzutowy $++++$

5.6 Ćwiczenie: niezdegenerowaną kwadrykę typu $++--$ w $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (tzn rzutowe domknięcie paraboloidy hiperbolicznej lub hiperboloidy jednopowłokowej) można utożsamić z torusem $S^1 \times S^1$. (Wskazówka: patrz prostokreślność, odwzorowanie Segre.)