

# GAL\*, konspekt wykładów: Endomorfizmy

11 marzec 2014

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

## 1 Ciała, wyznaczniki

**1.1** Przypomnienie aksjomatów ciała. Wprowadzenie pojęcia grupy i pierścienia.

**1.2** Ciała  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  i ciała pośrednie np.  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ,  $\mathbb{Q}(\pi)$ . Ciała  $\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$  ( $p$ -liczba pierwsza).  
Np.  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \simeq \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\sqrt{2}$  jako przestrzenie liniowe.

**1.3** Ciała funkcji wymiernych  $\mathbb{K}(X)$ ,  $\mathbb{K}(X_1, X_2, \dots, X_n)$

**1.4** Przykład:  $\mathbb{Q}(X) \simeq \mathbb{Q}(\pi)$

**1.5** Każde ciało zawiera najmniejsze podciało. Jest ono izomorficzne z  $\mathbb{F}_p$  lub  $\mathbb{Q}$ .

**1.6** Charakterystyka ciała  $\text{char}(\mathbb{K}) = p$  jeśli  $\mathbb{K}$  zawiera ciało izomorficzne z  $\mathbb{F}_p$ , w przeciwnym razie  $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ .

**1.7** Ciała skończone. Twierdzenie: ilość elementów ciała skończonego jest równa  $p^n$ , gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą, a  $n$  liczbą naturalną.

**1.8** Twierdzenie (bez dowodu) dla każdej liczby pierwszej  $p$  i  $n \in \mathbb{N}$  istnieje ciało o  $p^n$  elementach. Jest ono jedyne z dokładnością do izomorfizmu. Każdy element tego ciała spełnia równanie  $x^{p^n} - x = 0$ . Innymi słowy wielomian  $x^{p^n} - x$  w ciele  $\mathbb{F}_{p^n}$  ma  $p^n$  różnych pierwiastków.

**1.9** Przykłady:

$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 a$ , gdzie  $a$  spełnia  $a^2 + a + 1 = 0$

$\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 a \oplus \mathbb{F}_2 a^2$ , gdzie  $a$  spełnia  $a^3 + a + 1 = 0$

$\mathbb{F}_9 = \dots$ ,  $\mathbb{F}_{27} = \dots$

**1.10** Ogólna metoda: niech  $\mathbb{F}$  będzie ciałem skończonym o  $q$  elementach, a  $f \in \mathbb{F}[X]$  nierozkładalnym wielomianem stopnia  $n$ . Wtedy przestrzeń liniowa reszt z dzielenia przez  $f$  w  $\mathbb{F}[X]$  z działaniem mnożenia modulo  $f$  jest ciałem o  $q^n$  elementach.

**Wyznaczniki** [H. Toruńczyk, Notatki z wykładów IV]

**1.11** Twierdzenie o jednoznaczności wyznacznika: jeśli funkcja  $D : M_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  spełnia

- 1) Jest liniowa ze względu na każdy wiersz (kolumnę),
- 2) Jeśli dwa wiersze (kolumny) macierzy są równe, to  $D(A) = 0$
- 3)  $D(I) = 1$

to  $D(A) = \det(A)$  dla każdej macierzy  $A$ .

**1.12** Funkcja spełniająca 1) i 2) w twierdzeniu powyżej nazywa się alternującą ze względu na wiersze (kolumny).

**1.13** 1) i 2) implikuje

2') Jeśli w macierzy  $A$  zamienić dwa wiersze (kolumny) to znak  $D(A)$  zmienia się.

**1.14** Jeśli charakterystyka ciała nie jest równa dwa to 1) i 2') implikuje 2).

## 2 Orientacja, przestrzenie ilorazowe

**Orientacja** [Tor IV §4.2] Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru nad  $\mathbb{R}$ . Rozważamy różne bazy  $V$ . Mówimy, że baza  $\mathcal{A}$  jest zgodna z  $\mathcal{B}$  jeśli  $\det M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(Id) > 0$ . To jest relacja równoważności w zbiorze baz.

**2.1** Są dwie klasy abstrakcji: Jeśli  $\mathcal{A} \not\sim \mathcal{B}$  i  $\mathcal{B} \not\sim \mathcal{C}$  to  $\mathcal{A} \sim \mathcal{C}$ .

**2.2**  $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$  wtedy i tylko jeśli istnieje ciągła rodzina baz  $\mathcal{A}_t$ ,  $t \in [0, 1]$  taka, że  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$  i  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}$ .

**2.3** Ćwiczenie: Jeśli  $V$  jest przestrzenią zespoloną, przez  $V_{\mathbb{R}}$  rozumiemy przestrzeń wektorową rzeczywistą, równą  $V$  jako zbiór, jedynie zapominamy o mnożeniu przez liczby urojone. Niech  $\phi : V \rightarrow V$  będzie liniowym izomorfizmem. Wykazać, że  $\phi$  przeprowadza dowolną bazę  $V_{\mathbb{R}}$  na bazę zgodną.

### Przestrzenie ilorazowe [Kostyrkin I.2.6] i kategorijskie definicje

**2.4** Niech  $W \subset V$  para podprzestrzeni. Definiujemy relację równoważności w  $V$ :  $\alpha \sim \beta$  jeśli  $\alpha - \beta \in W$ . Zbiór klas abstrakcji ma strukturę przestrzeni liniowej. Oznaczenie  $V/W$ .

**2.5** Odwzorowanie  $\pi : V \rightarrow V/W$  jest liniowe, jest epimorfizmem,  $\ker(\pi) = W$ .

**2.6** Jeśli  $V = W \oplus U$  to  $V/W \simeq U$ .

**2.7** Jeśli  $V$  jest skończonego wymiaru, to  $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$ .

**2.8** Twierdzenie o izomorfizmie: niech  $\phi : V \rightarrow Z$  będzie przekształceniem liniowym, wtedy istnieje przekształcenie  $\bar{\phi} : V/\ker(\phi) \rightarrow Z$  takie, że  $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$ . Ponadto  $\bar{\phi}$  zadaje izomorfizm  $V/\ker(\phi) \simeq \text{im}(\phi)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{\phi} & \text{im}(\phi) & \hookrightarrow & Z \\
 \downarrow \pi & & \nearrow \bar{\phi} & & \\
 V/\ker(\phi) & & & & 
 \end{array}$$

$\simeq$

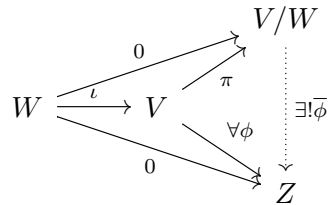
**2.9** Wniosek: Jeśli  $\phi : V \rightarrow Z$  jest epimorfizmem, to  $Z \simeq V/\ker(\phi)$ .

**2.10** Ćwiczenie: Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem domkniętym oraz niech  $C(A)$  oznacza zbiór funkcji ciągłych na  $S$ . Wtedy  $C(A) \simeq C(\mathbb{R})/I(A)$ , gdzie  $I(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \forall x \in A, f(x) = 0\}$ .

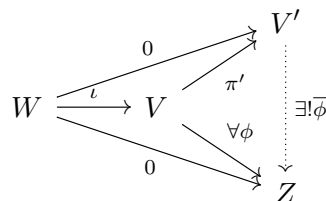
**2.11** Ćwiczenie: udowodnić dla  $U, W \subset V$ :

$$(U + W)/U \simeq W/(U \cap W).$$

**2.12 Własność uniwersalna ilorazu:** dla każdego przekształcenia liniowego  $\phi : V \rightarrow Z$  takiego, że  $\phi|_W = 0$  istnieje dokładnie jedno przekształcenie  $\bar{\phi}$  takie, że  $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$ :



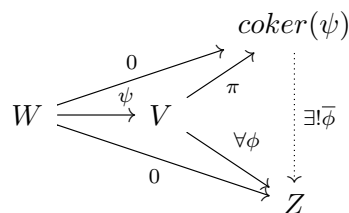
Własność uniwersalna determinuje iloraz z dokładnością do izomorfizmu. Jeśli odwzorowanie  $\pi' : V \rightarrow \bar{V}$  spełnia warunek:  $\pi' \circ \iota = 0$  oraz dla każdego przekształcenia liniowego  $\phi : V \rightarrow Z$  takiego, że  $\phi|_W = 0$  istnieje dokładnie jedno przekształcenie  $\bar{\phi}$  takie, że  $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$ :



to  $V' \simeq V/W$  oraz ten izomorfizm jest zgodny z rzutowaniami  $\pi' : V \rightarrow V'$  i  $\pi : V \rightarrow V/W$ .

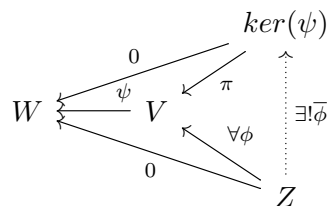
Innymi słowy: wszystkie przekształcenia z  $V$  zerujące się na  $W$  jednoznacznie faktoryzują się przez  $V/W$ . Własność jednoznacznej faktoryzacji definiuje  $V/W$ .

**2.13** Uogólnienie: Niech  $\psi : W \rightarrow V$  będzie przekształceniem liniowym. Kojądro  $\text{coker}(\psi)$  definiujemy poprzez własność uniwersalną.

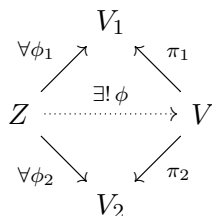


Mamy  $\text{coker}(\psi) \simeq V/\text{im}(\psi)$

**2.14** Kategoriejna definicja jądra:

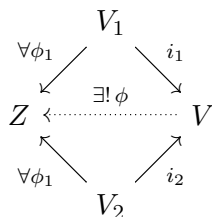


**2.15** Ćwiczenie: Kategoriejna definicja produktu (iloczynu kartezjańskiego): Jeśli  $V$  wraz z przekształceniami  $\pi_1, \pi_2$  spełnia warunek dla dowolnej przestrzeni  $Z$  oraz przekształceń  $\phi_1, \phi_2$  istnieje dokładnie jedno przekształcenie  $\phi$ , takie, że  $\phi_i = \pi_i \phi$  dla  $i = 1, 2$



wtedy  $V \simeq V_1 \times V_2$ .

**2.16** Ćwiczenie: Sformułować definicję zewnętrznej sumy prostej (koproduktu):



Pokazać, że w świecie przestrzeni liniowych zewnętrzna suma prosta jest izomorficzna z  $V_1 \times V_2$ , ale tak nie jest w świecie zbiorów.

### 3 Endomorfizmy czyli operatory liniowe [Kos roz 2], [Tor VI]

**3.1** (Uzupełnienie.) Zewnętrzna suma prosta przestrzeni liniowych  $\bigoplus_{i \in I} V_i$ . Jeśli zbiór indeksów  $I$  jest skończony, to  $\bigoplus_{i \in I} V_i \simeq \prod_{i \in I} V_i$ .

**3.2**  $\text{End}(V)$ , czyli algebra operatorów liniowych. Algebra macierzy  $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ .

**3.3** Podprzestrzenie niezmiennicze, wektory własne, wartości własne, spektrum (widmo), przestrzeń wektorów własnych odpowiadających jednej wartości własnej.

**3.4** Przykład: jakie są wektory własne przekształcenia  $D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $D(f) = f'$ ?

**3.5** Przykład: jakie są wektory własne przekształcenia  $D : C^\infty(S^1) \rightarrow C^\infty(S^1)$ ,  $D^2(f) = f''$ ?

**3.6** Przykład  $M(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , wartości własne  $\lambda = -1$  i  $\lambda = 5$ , wektory własne dla  $\lambda = -1$ :  $(-1, 1, 0)$ ,  $(-1, 0, 1)$ , dla  $\lambda = 5$ :  $(1, 1, 1)$ .

**3.7** Równanie charakterystyczne  $\det(M(\phi) - \lambda I) = 0$  i szukanie wektorów własnych.

**3.8** Przykład  $\phi(x, y) = (x + y, x)$  (związek z liczbami Fibonacciego).

**3.9** Przykład  $\phi(x, y) = (x + y, y)$ , tu  $\dim V_1 < \text{krotność } 1 \text{ w } \chi_\phi(x)$ .

**3.10** Przykład  $\phi(x, y) = (\cos(t)x + \sin(t)y, -\sin(t)x + \cos(t)y)$

**3.11** Ćwiczenie z analizy: Niech  $V = C^\infty(\mathbb{R})$ ,

a)  $\phi(f) = ((t^2 - 1)f'(t))'$ . Sprawdzić, że wielomian Legendra  $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((t^2 - 1)^n)$  jest wektorem własnym z wartością własną  $n(n + 1)$ .

b)  $\phi(f) = t f' - (1 - t^2)f''$ . Sprawdzić, że wielomian Czebyszewa  $T_n$  jest wektorem własnym z wartością własną  $n^2$ . (Wielomian Czebyszewa spełnia  $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$ .)

## 4 Endomorfizmy, cd.

**4.1** Wielomian charakterystyczny  $\chi_\phi(t) = \det(M(\phi) - tI)$  nie zależy od wybranej bazy. Wyraz wolny  $a_0$  to wyznacznik, wyraz  $a_{n-1}$  to ślad  $\text{tr}(\phi) := \text{tr}(M(\phi))$  razy  $(-1)^{n-1}$ .

**4.2** Dla dowolnych macierzy kwadratowych  $A, B$  mamy  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**4.3** Wymiar przestrzeni własnej  $V_\lambda$  jest mniejszy bądź równy krotności  $\lambda$  w  $\chi_\phi$ .

**4.4** Jeśli ciało jest algebraicznie domknięte, to istnieje conajmniej jedna wartość własna i wektor własny.

**4.5** Jeśli  $n$  jest nieparzyste, to dla każdego przekształcenia liniowego  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  istnieje wektor własny.

**4.6** Jeśli wektory  $\alpha_i$  dla  $i = 1, \dots, k$  są własne dla różnych wartości własnych, to są liniowo niezależne. W szczególności, jeśli  $\chi_\phi(t)$  rozkłada się na różne czynniki liniowe, to w pewnej bazie  $M(\phi)$  jest diagonalna. (Mówimy  $\phi$  można zdiagonalizować.)

**4.7** Jeśli ciało jest algebraicznie domknięte, to istnieje baza, w której  $M(\phi)$  jest górnotrójkątna. (Górnotrójkątność  $M(\phi)$  jest równoważna temu, że istnieje ciąg podprzestrzeni liniowych niezmienniczych

$$0 = V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset V^n = V$$

takich, że  $\dim V^i = i$ .)

**4.8** Twierdzenie Cayleya-Hamiltona:  $\chi_\phi(\phi) = 0$ . W dowodzie korzystamy z tego, że każde ciało jest zawarte w ciele algebraicznie domkniętym.

**4.9** Przestrzeń pierwiastkowa:  $V_{(\lambda)} = \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} : (\phi - \lambda Id)^n(v) = 0\}$ . (Inna nazwa: uogólniona przestrzeń własna.)

**4.10** Twierdzenie o rozkładzie na przestrzenie pierwiastkowe. Jeśli  $\chi_\phi(t)$  rozkłada się na czynniki liniowe w  $\mathbb{K}$  (np.  $\mathbb{K}$  jest algebraicznie domknięte), to

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(\phi)} V_{(\lambda)}.$$

**4.11** Lemat o wielomianach: jeśli wielomiany  $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{K}[x]$  nie mają wspólnego czynnika, to istnieją wielomiany  $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{K}[x]$  takie, że  $\sum g_i h_i = 1$ . (Dowód algorytmem Euklidesa)

**4.12** Dowód 4.10 z lematu o wielomianach, jak w [Kos roz II §4.3].

## 5 Twierdzenie Jordana

**5.1** Załóżmy, że  $\phi : V \rightarrow V$  spełnia pewną tożsamość wielomianową  $f(\phi) = 0$  (gdy  $\dim(V) < \infty$  to np.  $f = \chi_\phi$ ). Wielomian minimalny  $\mu_\phi$  jest wielomianem o najmniejszym stopniu spełniającym  $\mu_\phi(\phi) = 0$ . Każdy inny wielomian mający tę własność jest podzielny przez  $\mu_\phi$ . Naogół  $\mu_\phi \neq \chi_\phi$ , choć w  $\mu_\phi$  musi wystąpić każdy czynnik liniowy z  $\chi_\phi$ .

**5.2** Rozkład  $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(\phi)} V_{(\lambda)}$  można udowodnić także gdy  $\dim V = \infty$  oraz  $\phi$  spełnia tożsamość wielomianową i wielomian minimalny  $\mu_\phi$  rozkłada się na czynniki liniowe.

**5.3** Def:  $\psi \in \text{End}(V)$  jest nilpotentny jeśli  $\psi^n = 0$  dla pewnego  $n$ . Jeśli przestrzeń jest skończonego wymiaru, to ten warunek jest równoważny:  $V = V_{(0)}$ .

**5.4** Def:  $V$  jest cykliczna, jeśli  $V$  istnieje wektor  $\alpha \in V$ , taki, że  $V$  jest rozpęta przez  $\phi^i(\alpha)$ ,  $i \geq 0$ .

**5.5** Załóżmy, że  $\psi$  nilpotentny. Niech  $m$  najmniejsze, takie, że  $\psi^m(\alpha) = 0$ . Wtedy

$$\psi^{m-1}(\alpha), \psi^{m-2}(\alpha), \dots, \psi(\alpha), \alpha$$

są liniowo niezależne. Macierz  $\psi|_{\text{lin}\{\psi^{m-1}(\alpha), \psi^{m-2}(\alpha), \dots, \psi(\alpha), \alpha\}}$  w tej bazie jest postaci Jordana z jedną klatką o wartości własnej  $\lambda = 0$

**5.6** Lemat: Załóżmy, że  $\psi$  nilpotentny na  $V$  oraz  $W \neq V$  podprzestrzeń cykliczna maksymalnego wymiaru. Wtedy istnieje wektor własny  $\beta \in V \setminus W$ .

**5.7** Lemat: Załóżmy, że  $\psi$  nilpotentny na  $V$  oraz  $W$  podprzestrzeń cykliczna maksymalnego wymiaru. Wtedy istnieje niezmiennicze dopełnienie do sumy prostej  $V = W \oplus U$ .

Dow. Indukcja po  $\dim(V)$ : dzielimy przez  $\text{lin}(\beta)$ .

**5.8** Wniosek: Każda przestrzeń nilpotentna rozkłada się na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych. Stąd dowód tw Jordana.

**Twierdzenie o postaci kanonicznej Jordana** dla endomorfizmu przestrzeni skończonego wymiaru nad ciałem algebraicznie domkniętym. [Kos roz II §4.2]

**5.9** Jednoznaczność: ilość klatek Jordana nie zależy od wyboru bazy. Ilość klatek  $\ell$ -wymiarowych z wartością własną  $\lambda$  jest równa  $d(\ell, \lambda)$ . Niech  $\psi = \phi - \lambda Id$ . Mamy

$$\sum_{i \geq \ell} d(i, \lambda) = \dim(\ker(\psi^\ell)) - \dim(\ker(\psi^{\ell-1})).$$

**5.10** Ćwiczenie

$$\mu_\phi = \prod_{\lambda \in \text{Spec}(\phi)} (x - \lambda)^{r(\lambda)},$$

gdzie  $r(\lambda)$  jest rozmiarem maksymalnej klatki Jordana z wartością własną  $\lambda$ .

**5.11** Przykład:  $M(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Jedna klatka dla wartości własnej 4 rozmiaru 1 i jedna

dla wartości własnej 1 rozmiaru 3.

## 6 Efektywne znajdowanie bazy Jordana i jednoznaczności rozkładu

**6.1** Szukanie bazy Jordana: dla  $\lambda \in \text{Spec}(\phi)$ . Rozważamy ciąg podprzestrzeni

$$V = \text{im}(\psi^0) \supset \text{im}(\psi^1) \supset \text{im}(\psi^2) \supset \dots \supset \text{im}(\psi^{r(\lambda)-1}) \supset \text{im}(\psi^{r(\lambda)}) = \text{im}(\psi^{r(\lambda)+1}) = \text{im}(\psi^{r(\lambda)+2}) = \dots$$

Konstruujemy „łańcuszki”  $\dots \mapsto \alpha_4^{(i)} \mapsto \alpha_3^{(i)} \mapsto \alpha_2^{(i)} \mapsto \alpha_1^{(i)} \mapsto 0$ . Wektory  $\alpha_\ell^{(i)}$  znajdujemy indukcyjnie poczynając od  $\text{im}(\psi^{r(\lambda)}) \cap V_\lambda = \{0\}$ . Jeśli na którymś etapie układ wektorów  $\{\alpha_\ell^{(i)}\}$  nie rozpinają  $\text{im}(\psi^{r(\lambda)-j}) \cap V_\lambda$  to uzupełniamy go do układu rozpinającego o elementy jądra  $\psi$ .

**6.2** Ćwiczenie: Obliczyć  $A^{2013}$ , gdzie  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  lub  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Wynik

podać w postaci  $CDC^{-1}$

**6.3** Ćwiczenie. Załóżmy, że operator  $\phi$  spełnia  $\phi^m = Id$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Jeśli  $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$  lub  $\text{char}(\mathbb{K}) \nmid m$  to dla każdego  $\lambda \in \text{Spec}(\phi)$  mamy równość  $V_{(\lambda)} = V_\lambda$  (czyli  $\phi$  można zdiagonalizować, gdy  $\mathbb{K}$  jest algebraicznie domknięte).

b) Podać przykład operatora  $\phi \in \text{End}(\mathbb{F}_p^2)$  spełniającego  $\phi^p = Id$  oraz  $V_{(1)} \neq V_1$

**6.4** Mówimy, że  $\phi \in \text{End}(V)$  jest półprosty, jeśli w pewnej bazie  $M(\phi)$  jest diagonalna. Dla endomorfizmu półprostego jeśli  $(\phi - \lambda Id)^m(\alpha) = 0$  to  $(\phi - \lambda Id)(\alpha) = 0$ .

**6.5** Operator półprosty ma  $\phi$  własność:  $\ker(\phi) = \ker(\phi^n)$  dla każdego  $n \geq 1$ .

**6.6** Ćwiczenie: wykazać, że  $\phi \in \text{End}(V)$  jest półprosty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej podprzestrzeni niezmienniczej  $W \subset V$  istnieje niezmiennicze dopełnienie do sumy prostej  $V = W \oplus U$ .

**6.7** (Addytywny rozkład Jordana-Chevalleya.) Jeśli  $\phi$  zapisać jako  $\phi = \phi_s + \phi_n$ , gdzie  $\phi_s$  jest półprosty, a  $\phi_n$  jest nilpotentny oraz  $\phi_n \phi_s = \phi_s \phi_n$  to składniki są wyznaczone jednoznacznie.

**6.8** Lemat:  $\ker(\phi_s - \lambda Id) = V_{(\lambda)}$ . (Zatem  $\phi_s$  na  $V_{(\lambda)}$  musi być mnożeniem przez skalar  $\lambda$ .)

Dow. Niech  $N$  będzie takie, że  $\phi_n^N = 0$  oraz  $V_{(\lambda)} = \ker((\phi - \lambda Id)^N)$ .

Wtedy także  $V_{(\lambda)} = \ker((\phi - \lambda Id)^{2N})$ .

Z przemienności  $(\phi_s - \lambda Id)$  i  $\phi_n$  mamy

$$(\phi - \lambda Id)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \phi_n^k (\phi_s - \lambda Id)^{N-k}.$$

Stąd dla  $v \in \ker(\phi_s - \lambda Id)$  mamy  $(\phi - \lambda Id)^N(v) = 0$ . Czyli  $V_{(\lambda)} = \ker((\phi - \lambda Id)^N) \subset \ker(\phi_s - \lambda Id)$ .

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} (\phi_s - \lambda Id)^{2N} &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N}{k} (-\phi_n)^k (\phi_s - \lambda Id)^{2N-k} + \sum_{k=N}^{2N} \binom{2N}{k} (\phi_s - \lambda Id)^{2N-k} (-\phi_n)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N}{k} (-\phi_n)^k (\phi_s - \lambda Id)^{2N-k}. \end{aligned}$$

Dla  $v \in \ker((\phi - \lambda Id)^N)$  mamy  $(\phi_s - \lambda Id)^{2N}(v) = 0$ , czyli  $\ker((\phi_s - \lambda Id)^{2N}) \subset \ker((\phi - \lambda Id)^N) = V_{(\lambda)}$ .

Ale  $\ker((\phi_s - \lambda Id)^{2N}) = \ker(\phi_s - \lambda Id)$ .

**6.9** (Multiplikatywny rozkład Jordana-Chevalleya.) Mówimy, że  $\psi$  jest unipotentny jeśli  $\psi - Id$  jest nilpotentny. Załóżmy, że  $\phi$  jest odwracalny. Jeśli  $\phi$  zapisać jako  $\phi = \phi_s \phi_u$ , gdzie  $\phi_s$  jest półprosty, a  $\phi_u$  jest unipotentny oraz  $\phi_u \phi_s = \phi_s \phi_u$  to czynniki są wyznaczone jednoznacznie.