# NIERACHUNKOWE ZADANIA Z GAL-U

http://www.mimuw.edu.pl/∼ aweber/

Wersja 17.2.2017

## 1 Przestrzeń sprzężona

**1.1** Niech $f(x, y, z) = 2x + y - 3z$ będzie funkcjonałem na $\mathbb{R}^3$. Zanaleźć współrzędne $f$
a) w bazie sprzężonej do standardowej,
b) w bazie sprzeżonej do $(3, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 7)$,
c) w bazie sprzeżonej do $(2, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 2)$.

**1.2** Niech $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będą funkcjonałami zadanymi wzorami $f(x, y) = x + iy$, $g(x, y) = x - iy$. Wykazać, że $\{f, g\}$ stanowią bazę $(\mathbb{C}^2)^*$. Znaleźć taką bazę $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^2$, że $\{f, g\}$ jest bazą sprzężoną do $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

**1.3** Niech $n \in \mathbb{N}$. Badamy funkcjonały liniowe z przestrzeni macierzy $\phi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Opisać wszystkie funkcjonały spełniające tożsamość $\phi(AB) = \phi(BA)$ dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

**1.4** Wykazać, że funkcjonały mają takie same jądra wtedy i tylko wtedy gdy są proporcjonalne.

**1.5** Niech $\dim V = n$ oraz niech $f_1, f_2, \dots f_n \in V^*$. Wykazać że $f_1, f_2, \dots f_n$ są liniowo niezależne wtedi i tylko wtedy gdy $\bigcap_{i=1}^n ker(f_i) = \{0\}$.

## 2 Wyznaczniki

**2.1** Liczby Bernouliego dane są wzorem

$$B_n = (-1)^{n+1}(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

Niech $b_i$ będą współczynnikami rozwinięcia Taylora

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots.$$

Wykazać, że $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_{2n+1} = 0$ dla $n > 0$, oraz $b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n!)} B_n$.

**2.2** Udowodnić

$$B_n = \frac{1}{2}(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{5}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2n-1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-5)!} & \dots & \frac{1}{3!} \end{vmatrix}.$$

**2.3** Udowodnić

$$B_n = 2^n(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}.$$

Wsk. Niech $c_n = b_{2n}$:

$$\left(1 - \frac{1}{2}x + c_1x^2 + c_2x^4 + c_3x^6 + \dots\right)\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots\right) = 1.$$

Przyrównać współczynniki przy potęgach $x$ do 0.

**2.4** Niech $A$ będzie macierzą rzeczywistą o $m$ wierszach i $n$ kolumnach, $m \geq n$. Załóżmy, że $A$ jest maksymalnego rzędu. Udowodnić, że $det(A^TA) \neq 0$.

**2.5** Niech $Cl(n)$ będzie zbiorem funkcji wielomianowych na przestrzeni macierzy kwadratowych $n \times n$, które przyjmuja, te same wartości na macierzach podobnych (tzw. funkcje klas). Oznaczmy przez $Sym(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zbiór wielomianów symetrycznych zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Niech $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oznacza macierz diagonalna, o wyrazach $x_1, x_2, \dots, x_n$. Wykazać, że przekszta lcenie

$$Cl(n) \to Sym(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f \mapsto f(D(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

jest izomorfizmem.

**2.6** Dany ciąg liczb naturalnych $k_1 > k_2 > \cdots > k_n$, oraz ciąg parami różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n$. Udowodnić, że znak wyznacznika macierzy

$$\begin{pmatrix} x_1^{k_1} & x_1^{k_2} & \dots & x_1^{k_n} \\ x_2^{k_1} & x_2^{k_2} & \dots & x_2^{k_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{k_1} & x_n^{k_2} & \dots & x_n^{k_n} \end{pmatrix}$$

nie zależy od ciągu $k_i$. (Patrz zadania o funkcjach Schura.)

**2.7** Niech $A$ będzie kwadratową macierzą antysymetryczną (tzn $A^T = -A$) z wyrazami cakowitymi na przekątnej. Wykazać, że $\det(A)$ jest kwadratem.

# 3 Endomorfizmy

**3.1** Ciąg Fibonacciego: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Wyprowadzić wzór na $F_n$.

**3.2** Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem liniowych przestrzeni rzeczywistych. Wykazać, że jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartoćią własną, to $\overline{\lambda}$ też jest wartością własą i $\dim V_\lambda = \dim V_{\overline{\lambda}}$.

**3.3** Zdiagonalizować macierz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$.

**3.4** Wykazać, że macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ diagonalizuje się.

**3.5** Skonstruować przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{C} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ takie, że
$$\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1) \cdot \phi(z_2).$$

**3.6** Opisać wszystkie klasy sprzężoności rzeczywistych macierzy $2 \times 2$.

**3.7** Załóżmy, że $\mathbb{K}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym. (Wersja łatwiejsza $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.) Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem spełniającym $\phi^k = Id$ dla pewnego $k$ niepodzielnego przez $char(\mathbb{K})$. Udowodnić, że w pewnej bazie macierz $\phi$ jest diagonalizowalna.

**3.8** Dla każdego $k > 1$ podać przykład ciała $\mathbb{K}$ i operatora $\phi \in End(\mathbb{K}^2)$, który spełnia $\phi^k = Id$, lecz nie można go zdiagonalizować nawet jeśli się rozszerzy ciało do algebraicznie domkniętego.

**3.9** Dane jest przekształcenie $\phi : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$. Wiemy, że wartości własne $\phi$ to 1 i 2. Ponadto wiemy, że

$$1) \quad \dim(ker(\phi - Id)) = 2, \quad \dim(ker((\phi - Id)^2)) = 4,$$

$$2) \quad \dim(ker(\phi - 2Id)) = 1, \quad \dim(ker((\phi - 2Id)^2)) = 2.$$

Jakiej postaci Jordana może być macierz $\phi$?

**3.10** Załóżmy, że $char(\mathbb{K}) \neq 3$. Niech $\phi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć bazę Jordana dla $\phi$.

**3.11** Niech $\phi : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Znaleźć bazę Jordana dla $\phi$. Odpowiedź uzależnić od charakterystyki ciała.

**3.12** Jeśli $V$ jest przestrzenia zespoloną, przez $V_{\mathbb{R}}$ rozumiemy przestrzeń wektorową rzeczywistą, równą $V$ jako zbiór, jedynie zapominamy o mnożeniu przez liczby urojone. Niech $\phi : V \to V$ będzie liniowym izomorfizmem. Wykazać, że $\phi$ przeprowadza dowolną bazę $V_{\mathbb{R}}$ na bazę zgodnie zorientowaną.

**3.13** Wykazać, że jeśli izomorfizm liniowy $\phi$ zachowuje orientację, to można znaleźć ciągłą rodzine izomorfizmów $\phi_t$, $t \in [0, 1]$, taką że $\phi_1 = \phi$ i $\phi_0 = Id$.

**3.14** Niech $V = C^\infty(\mathbb{R})$,
a) $\phi(f) = \big((t^2 - 1)f'(t)\big)'$. Sprawdzić, że wielomian Legendra $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\big((t^2-1)^n\big)$ jest wektorem własnym z wartością własną $n(n+1)$.
b) $\phi(f) = t\,f' - (1 - t^2)f''$. Sprawdzić, że wielomian Czebyszewa $T_n$ jest wektorem własnym z wartością własną $n^2$. (Wielomian Czebyszewa spełnia $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$.)

**3.15** Obliczyć $A^{2013}$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ lub $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Wynik podać w postaci $C\,D\,C^{-1}$

**3.16** Wykazać, że $\phi \in End(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej podprzestrzeni niezmienniczej $W \subset V$ istnieje niezmiennicze dopełnienie do sumy prostej $V = W \oplus U$.

**3.17** Mówimy, że $\psi$ jest unipotentny jeśli $\psi - Id$ jest nilpotentny. Załóżmy, że $\phi$ jest odwracalny. Udowodnić, że jeśli $\phi$ zapisać jako $\phi = \phi_s\phi_u$, gdzie $\phi_s$ jest diagonalizowalny, a $\phi_u$ jest unipotentny oraz $\phi_u\phi_s = \phi_s\phi_u$ to czynniki są wyznaczone jednoznacznie.

**3.18** Niech $\phi \in End(V)$ (nie zakładamy, że $\dim(V) < \infty$). Załóżmy, że $\phi$ spełnia tożsamość wielomianową $f(\phi)$, oraz wielomian $f(x)$ rozkłada się na czynniki względnie pierwsze $f(x) = g_1(x)g_2(x)$. Udowodnić, że $V$ rozkłada się na sumę prostą niezmienniczych przestrzeni $V = V_1 \oplus V_2$ oraz $g_i(\phi_{|V_i}) = 0$ dla $i = 1, 2$.

**3.19** Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem ($V$ niekoniecznie skonczońego wymiaru). Niech $f(x)$ będzie wielomianem rozkładającym się w ciele bazowym $\mathbb{K}$ na czynniki liniowe $f(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \lambda_i)^{n_i}$. Przypuśćmy, że $f(\phi) = 0$. Udowodnić, że $V$ jest sumą prostą podprzestrzeni pierwiastkowych

$$V = V_{(\lambda_1)} \oplus V_{(\lambda_2)} \oplus \cdots \oplus V_{(\lambda_k)}\,.$$

**3.20** Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Załóżmy, że $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$ lub $\operatorname{char} \mathbb{K} < \dim V$. Dany operator A działający na $V$. Pokazać, że jeśli $tr(A^k) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots \dim V$, to A jest nilpotentny.

**3.21** Niech $V$ będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad $\mathbb{Q}$ i niech $A : V \to V$ będzie endomorfizmem, takim, że $A^5 = Id$. Załóżmy, że 1 nie jest wartością własną. Udowodnić, że wymiar $V$ jest podzielny przez 4.

**3.22** Niech $V$ będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad $\mathbb{R}$ i niech $A : V \to V$ będzie endomorfizmem, takim, że $A^2 = -Id$. Udowodnić, że wymiar $V$ jest podzielny przez 2.

# 4 Przestrzenie afiniczne

**4.1** Niech $E$ będzie przestrzenią afiniczną, a $A \subset E$ jej podzbiorem. Załóżmy, że dla dowolnej pary punktów $p, q \in A$ prosta $af(p, q) \subset A$. Czy $A$ jest podprzestrzenią afiniczną?

**4.2** Mówimy, że $p, q, r, s \in E$ jest równoległobokiem gdy $\omega(p, q) = -\omega(r, s)$. Udowodnić, że jeśli $char(\mathbb{K}) \neq 2$, to $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s$.

**4.3** Sformułować i udowodnić twierdzenie Talesa w przestrzeni afinicznej nad ciałem $\mathbb{K}$.

**4.4** Twierdzenie Menelaosa. Niech $p_1, p_2, p_3 \in E$ oraz

$$q_1 = a_1p_2 + (1 - a_1)p_3 \qquad q_2 = a_2p_3 + (1 - a_2)p_1 \qquad q_3 = a_3p_1 + (1 - a_3)p_2$$

dla $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$. Udowodnić, że $q_1, q_2, q_3$ są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy $a_1a_2a_3 = (a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1)$.

**4.5** Dane sześć różnych punktów $A$, $B$, $C$, $P$, $Q$ i $R$ w przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{K}$. Przypuśćmy, że punkty $P$, $Q$ i $R$ leżą odpowiednio na prostych $af(B, C)$, $af(C, A)$ i $af(A, B)$:
$P = pB + (1 - p)C$
$Q = qC + (1 - q)A$
$R = rA + (1 - r)B$.
Znaleźć warunek dla $p, q, r \in \mathbb{K}$ na to, by proste $af(A, P)$, $af(B, Q)$ i $af(C, R)$ przecinały się w jednym punkcie. (Załóżmy, że żadne dwie proste występujące w zadaniu nie są równoległe.)

**4.6** Dana jest przestrzeń afiniczna wymiaru $n$, jej baza punktowa oraz $n + 1$ punktów $q_i$. Niech $a_{i,0}, \ldots, a_{i,n}$ będą współrzednymi barycentrycznymi punktu $q_i$. Wykazać, że $det(a_{i,j}) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy punkty są w położeniu szczególnym.

**4.7** Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że $F(p_i) = q_i$, gdzie $p_0 = [2, 1]$, $p_1 = [1, 2]$, $p_2 = [1, 1]$
a) $q_0 = [1, 1]$, $q_1 = [1, 2]$, $q_2 = [0, 1]$
b) $q_0 = [4, 1]$, $q_1 = [3, 3]$, $q_2 = [2, 1]$
c) $q_0 = [3, 1]$, $q_1 = [3, 2]$, $q_2 = [2, 1]$.
Znaleźć punkty stałe i proste niezmiennicze przekształcenia $F$.

**4.8** Niech $A = \mathbb{K}^n$ będzie przestrzenią afiniczną, a $B$ podprzestrzenią afiniczną opisaną układem równań afinicznych $\{f_i(x) = 0\}_{i\in I}$. Wykazać, że jeśli $H$ jest hiperpowierzchnią afiniczną (tzn. $\dim A - \dim H = 1$) zawierającą $B$, to $H$ można opisać równaniem $\sum_{i\in I} a_i f_i(x) = 0$ dla pewnego wyboru $a_i \in \mathbb{K}$.

**4.9** Dane dwie podprzestrzenie afiniczne $E$ i $F$ wymiaru $n$ w $\mathbb{K}^{2n+1}$. Załóżmy, że są one położone skośnie (tzn. $TE \cap TF = \{0\}$ i $E \cap F = \emptyset$). Ponadto dany punkt $p$ nienależący do żadnej z tych podprzestrzeni.
a) Ile jest prostych afinicznych przechodzących przez $p$ i przecinających $E$ oraz $F$?
b) Czy każdą taką konfigurację (para przestrzeni i punkt) można przekształcić afinicznie na dowolną inną?

**4.10** Niech $K, L, M \subset \mathbb{K}^3$ będzie trójką prostych parami skośnych. Czy każdą taką trójkę można przekształcić na dowolną inną za pomocą izomorfizmu afinicznego? Jeśli nie, to opisać orbity działania grupy izomorfizmów afinicznych na zbiorze takich trójek.

**4.11** Wyznaczyć wszystkie punkty stałe oraz proste i płaszczyzny zachowywane przez przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zdefinowane na bazie punktowej:
$f(3, 2, 3) = (2, 4, 6)$
$f(4, 2, 3) = (1, 8, 12)$
$f(3, 3, 3) = (-1, -5, -1)$
$f(3, 2, 4) = (6, 12, 11)$.
(Zbiór $X$ jest zachowywany przez $f$ gdy $f(X) \subset X$.)

# 5 Przekształcenia rzutowe

**5.1** Niech $f(x, y) = (1/x, y/x)$. Znaleźć przeciwobraz okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

**5.2** Niech $f(x, y) = (x/(x-1), y/(x-1))$. Znaleźć przeciwobraz okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

Niech $A$ będzie odwracalną macierzą wymiaru $n + 1$. Określamy przekształcenie $\mathbb{K}^n$ wzorem $f_A(x_1, \dots, x_n) = (y_1/y_0, \dots, y_n/y_0)$, gdzie $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T = A(1, x_1, \dots x_n)^T$.

**5.3** Wykazać, że $f_A$ przeprowadza kwadryki w $\mathbb{K}^n$ na kwadryki.

**5.4** Wykazać, że elipsy, hiperbole i parabole na płaszczyźnie są rzutowo równoważne. Znaleźć przekształcenia rzutowe przeprowadzające afiniczne jedne postacie kanoniczne na drugie.

**5.5** Znaleźć przekształcenie rzutowe $\mathbb{R}^2$ przeprowadzające hiperbolę na parabolę.

**5.6** Znaleźć przekształcenie rzutowe $\mathbb{R}^2$ przeprowadzające dwie przecinające się proste na proste równoległe.

**5.7** Czy istnieje przekształcenie rzutowe $\mathbb{R}^3$ przeprowadzające sferę na paraboloidę hiperboliczną (tzn. siodło)?

**5.8** Niech $\mu_{n+1}(\mathbb{K})$ będzie zbiorem rozwiązań równania $x^{n+1} = 1$ w ciele $\mathbb{K}$. To jest podgrupa $\mathbb{K}^*$. Niech $SL_{n+1}(\mathbb{K})$ będzie grupą przekształeń o wyznaczniku 1. Wykazać, że jeśli w $\mathbb{K}$ można wyciągać pierwiastki stopnia $n + 1$, to poniższy ciąg jest dokładny:

$$\mu_{n+1}(\mathbb{K}) \hookrightarrow SL_{n+1}(\mathbb{K}) \twoheadrightarrow PGL_{n+1}(\mathbb{K}).$$

**5.9** Przekształcenie rzutowe $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ jest wyznaczone przez wartości na $n + 2$ punktach takich, że każde $n + 1$ punktów nie leży w przestrzeni rzutowej mniejszego wymiaru.

**5.10** Udowodnić, że przekształcenia rzurowe zachowują współliniowość oraz dla czwórki punktów leżącch na jednej prostej $p, q, r, s \in L$ zachowany jest dwustosunek

$$\frac{x(p) - x(r)}{x(p) - x(s)} \cdot \frac{x(q) - x(s)}{x(q) - x(r)} \in \mathbb{K},$$

gdzie $x(p), x(q), x(r), x(s) \in \mathbb{K}$ są współrzednymi afinicznymi na $L$ danych punktów.

# 6 Grupy przekształceń

**6.1** Jeśli przekształcenie liniowe $\mathbb{K}^2$ zachowuje 3 rózne proste, to jest mnożeniem przez skalar.

**6.2** Niech zbiór $X$ będzie zbiorem par prostych (liniowych) w $\mathbb{K}^2$. Grupa $G = GL(2, \mathbb{K})$ działa na $X$ w sposób oczywisty. Opisać orbity.

**6.3** To samo zadanie dla $X$, który jest zbiorem trójek prostych.

**6.4** To samo zadanie dla $X$, który jest zbiorem trójek prostych w $\mathbb{K}^3$ oraz $G = GL(3, \mathbb{K})$.

**6.5** To samo zadanie dla $X$, który jest zbiorem trójek prostych afinicznych w $\mathbb{K}^2$ oraz $G = Aff(\mathbb{K}^2)$ jest grupą przekształceń afinicznych.

**6.6** To samo zadanie dla $X$, który jest zbiorem konfiguracji typu 2 proste + punkt w $\mathbb{K}^2$ oraz $G = Aff(\mathbb{K}^2)$.

**6.7** To samo zadanie dla $X$, który jest zbiorem konfiguracji typu 2 proste + punkt w $\mathbb{K}^3$ oraz $G = Aff(\mathbb{K}^3)$.

**6.8** Grupa $G = \mathbb{Z}/2$ działa na $\mathbb{C}^2$ poprzez zamianę zmiennych: $\tau(x, y) = (y, x)$ dla $0 \neq \tau \in G$. Niech $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ będzie zadane wzorem $F(x, y) = (x + y, xy)$. Wykazać, że $F$ zadaje bijekcje pomiędzy $\mathbb{C}^2/G$ a $\mathbb{C}^2$. Czy to samo jest prawdziwe jeśli zastąpić $\mathbb{C}$ przez $\mathbb{R}$?

**6.9** Grupa permutacji $\Sigma_n$ działa na $\mathbb{C}^n$ poprzez permutowanie współrzędnych. Znaleźć funkcję wielomianową $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ zadającą bijekcję $\mathbb{C}^n/\Sigma_n \simeq \mathbb{C}^n$.

**6.10** Ustalamy liczbę naturalną $n$. Niech $G_n \subset GL(2, \mathbb{R})$ będzie grupą obrotów o kąty postaci $\frac{2k\pi}{n}$. Znaleźć funkcję wielomianową stałą na orbitach działania $G_n$, która zadaje bijekcję $\mathbb{R}^2/G_n$ z $\mathbb{R}^2$.

**6.11** Grupa multiplikatywna $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ działa na $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ przez mnożenie $a \cdot v = av$. Iloraz $(\mathbb{K}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{K}^*$ oznaczamy przez $\mathbb{P}^1$. Niech $L \subset \mathbb{R}^3$ będzie prostą afiniczną. Zbiór płaszczyzn zawierających $L$ oznaczamy przez $X(L)$. Znaleźć bijekcję $X(L) \simeq \mathbb{P}^1$.

# 7 Formy 2-liniowe

$char(k) \neq 2\,!$

**7.1** Wyznaczniki kolejnych minorów mają znaki jak poniżej. Jakiej postaci może być forma? a) $+0-$, b) $++0-$, c) $+-0+$, d) $++0-$, e) $+-0-$, itp.

**7.2** Niech $\phi$ będzie dwuliniową formą na przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^4$ zadaną w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Czy istnieje baza, w której forma $\phi$ ma macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Odpowiedź uzależnić od własności ciała $\mathbb{K}$.

**7.3** Niech $V$ będzie przestrzenią funkcji różniczkowalnych na przedziale $[0, 1]$, zerujących się w 0 i 1. Niech $\phi(f, g) = \int_0^1 f(x)g'(x)dx$. Wykazać, że jest to forma antysymetryczna.

**7.4** Niech $V = M(2 \times 2; \mathbb{K})$ będzie przestrzenią liniową macierzy. Definiujemy symetryczną formę 2-liniową $\phi(A,B) = -Tr(AB)$. Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zbadać określoność tej formy na przestrzeni macierzy symetrycznych i antysymetrycznych.

**7.5** W niech $\phi$ będzie niezdegenerowaną symetryczną formą 2-liniową w $\mathbb{C}^n$. Jakiego wymiaru są maksymalne podprzestrzenie izotropowe (tzn takie $W \subset \mathbb{C}^n$, że $\phi_{|W} \equiv 0$)?

**7.6** Jeśli $a + b \neq 0$, to macierz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ jest kongruentna do $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & ab(a+b) \end{pmatrix}$.

**7.7** Znaleźć rodziny prostych pokrywające powierzchnię
a) hiperboloida jednopowlokowa $x^2 + y^2 - z^2 = 1$,
b) paraboloida hiperboloczna $x^2 - y^2 = 2z$.

**7.8** Niech będą dane dwie przestrzenie $V$ i $W$ z iloczynami skalarnymi. W przestrzeni przekształceń liniowych $L(V,W)$ wprowadzamy formę 2-liniową wzorem $\Theta(\phi,\psi) = tr(\phi \circ \psi^*)$. Wykazać, że $\Theta$ jest iloczynem skalarnym.

**7.9** Niech $\Theta$ będzie jak wyżej. Oraz niech $A$ i $B$ będą izometriami przestrzeni $V$ i $W$ odpowiednio. Niech $\alpha : L(V,W) \to L(V,W)$ będzie przekształceniem danym wzorem $\alpha(\phi) = B\phi A^{-1}$. Wykazać, że $\alpha$ jest izometrią.

**7.10** To samo polecenie, ale nie zakładamy, że formy 2-liniowe na $V$ i $W$ są iloczynami skalarnymi tylko, że są niezdegenerowane i symetryczne. Pytamy, czy $\Theta$ jest niezdegenerowane i symetryczne i czy $\alpha$ zachowuje $\Theta$.

**7.11** Dana antysymetryczna forma $\phi$ na $V$. Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią, $\dim(W) = k$. Załóżmy, że $\phi$ zeruje się na $W$, tzn. dla każdych $\alpha, \beta \in W$ mamy $\phi(\alpha,\beta) = 0$. Udowodnić, że można znaleźć bazę Darboux przestrzeni $V$ taką, że pierwszych $k$ wektorów rozpina $W$.

**7.12** Udowodnić, że dla $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ jeśli $A = -A^T$ to istnieje $p \in \mathbb{K}$ takie, że $\det(A) = p^2$, tzn. wyznacznik macierzy antysymetrycznej jest zawsze kwadratem.

**7.13** Dana jest $A$ – macierz antysymetryczna o wyrazach całkowitych. Wykazać, że $det\, A$ jest kwadratem.

**7.14** Formę kwadratową $xy + yz + xz$ w $\mathbb{R}^3$ zapisać w postaci sumy $\pm$kwadratów. Znaleźć bazę $\mathbb{R}^3$ w której dana forma ma postać diagonalną.

**7.15** Niech $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ będą macierzami symetrycznymi (nad $\mathbb{R}$), przy czym $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. Udowodnić, że jeśli $A$ i $B$ są dodatnio określone, to $C$ jest dodatnio określona.

**7.16** Niech $A$ i $B$ będą rzeczywistymi macierzami symetrycznymi i dodatnio określonymi. Wartości własne $A$ należą do odcinka $[a,b]$, a wartości własne $B$ należą do odcinka $[c,d]$. Wykazać, że wartości własne $A+B$ należą do odcinka $[a+c, b+d]$.

**7.17** Forma 2-liniowa spełnia warunek:

$$f(x,y) = 0 \Rightarrow f(y,x) = 0\,.$$

Wykazać, że $f$ jest symetryczna albo antysymetryczna.

**7.18** Niech $\omega$ będzie niezdegenerowaną 2-liniową formą antysymetryczną na przestrzeni $V$. Niech $L$ będzie podprzestrzenią Lagrange'a (tzn. maksymalną podprzestrzenią taką, że $\omega(x,y) = 0$ dla $x, y \in L$). Wykazać, że istnieje baza przestrzeni $V$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

taka, że wektory $\alpha_i$ rozpinają $L$, wektory $\beta_i$ rozpinają inną podprzestrzeń Lagrange'a oraz $\omega(\alpha_i, \beta_j) = \delta^i_j$, $\omega(\beta_i, \beta_j) = 0$.

**7.19** Dane macierze:

$$A1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A5 = \begin{pmatrix} 35 & -25 \\ -25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Które z tych macierzy są kongruentne nad $\mathbb{Q}$? (*Mówimy, że $A$ i $B$ są kongruentne nad $\mathbb{Q}$ jeśli istnieje macierz odwracalna $C$ o współczynnikach wymiernych taka, że $A = C^T BC$.*)

**7.20 10. Czy istnieje** macierz rzeczywista symetryczna $4 \times 4$, której znaki minorów są następujące?
a) $-$ , $+$ , $0$ , $-$
b) $-$ , $+$ , $0$ , $+$
Czy znamy sygnaturę tej macierzy?

**7.21** Ciało $k = \mathbb{R}$. Niech $\Gamma$ będzie grafem o wierzchołkach $v \in I$. Definiujemy symetryczną formę dwuliniową na przestrzeni liniowej rozpiętej przez wierzchołki $V = lin_{v \in I}\{e_v\}$:

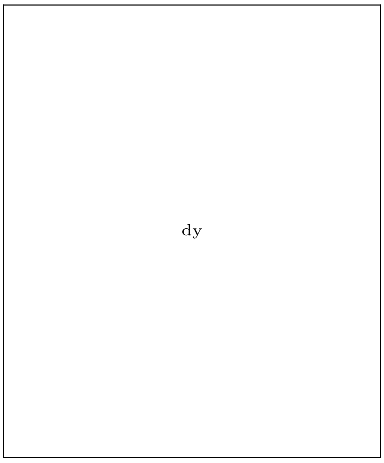
$$f(e_v, e_v) = 2$$

$$f(e_v, e_w) = -1 \text{ gdy } \overline{vw} \text{ jest krawędzią}$$

$$f(e_v, e_w) = 0 \text{ gdy } \overline{vw} \text{ nie jest krawędzią}$$

(zakładamy, że nie ma krawędzi $\overline{vv}$.)
Kiedy otrzymana forma jest dodatnio określona?
Które z tych form (dodatnio określonych) są jednocześnie niezdegenerowane nad każdym $\mathbb{F}_p$?

Wskazówka:




**7.22** Niech $e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ będzie standardową bazą $\mathbb{R}^n$. Sprawdzić, że $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ wraz z $\alpha_n = e_{n-1} + e_n$ jest bazą $\mathbb{R}^n$. Upewnić się, że macierz standardowego iloczynu skalarnego w bazie $\{\alpha_i\}$ jest macierzą stowarzyszoną z jednym z powyższych grafów.

**7.23** Ile składowych ma grupa $O(m, n)$ tzn grupa izometri formy typu $(1)^m + (-1)^n$?

Wsk. $O(m, n) \cap O(m+n) = O(m) \times On)$ ma tyle samo składowych co $O(m, n)$.

**7.24** Sklasyfikować formy dwuliniowe symetryczne $\mathbb{Q}^2$. Które macierze symetryczne $2 \times 2$ są kongruentne do macierzy jednostkowej?

**7.25** Niech $H$ oznacza przestrzeń $\mathbb{K}^2$ z formą zadaną przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dana niezdegenerowana forma dwuliniowa $(V, \phi)$, $\dim(V) = n$. Udowodnić, że $(V, \phi) \dot{\perp} (V, -\phi) \simeq H^{(\perp n)}$.

# 8 Iloczyny skalarne

**8.1** a) Wykazać że forma 2-liniowa $\phi(A, B) = -Tr(AB)$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej macierzy antysymetrycznych $n \times n$.
b) Wykazać, że $\phi(CAC^{-1}, CBC^{-1}) = \phi(A, B)$ jeśli $C$ jest macierzą odwracalną. Wskazać wszystkie formy kwadratowe o tej własności. Które z nich są dodatnio/ujemnie określone na przestrzeni liniowej macierzy antysymetrycznych/symetrycznych?

**8.2** Niech $\dim W < \infty$ i $U, V \subset W$. Wykazać
a) $(V^\perp)^\perp = V$;
b) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$;
c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$;
d) $0^\perp = W$ oraz $W^\perp = 0$.

**8.3** Znaleźć przykład $(V, \phi)$ nieskończonego wymiaru taki, że istnieje $W \subsetneq V$, $W^{\perp} = \{0\}$.

**8.4** Znaleźć odległość pomiędzy prostymi $[1, 0, -2] + t(0, 1, 1)$ i $[1, 0, 1] + t(1, -1, 0)$.

**8.5** Niech $v_1, v_2, \dots v_n \in \mathbb{R}^k$, a $h$ będzie odległością $v_1$ od $lin\{v_1, v_2, \dots v_{n-1}\}$. Udowodnić wzór na wyznaczniki Gramma:

$$G(v_1, v_2, \dots v_n) = h^2 G(v_1, v_2, \dots v_{n-1}).$$

**8.6** Niech $\phi$ i $\psi$ będą izometriami. Wykazać, że $ker(\phi - \psi) \perp \ker(\phi + \psi)$.

**8.7** Wykazać, że każdą niezdegenerowaną macierz można przedstawić jako iloczyn $AB$ macierzy symetrycznej, dodatnio określonej $A$ i ortogonalnej $B$ (tzn. $B\,B^T = I$).

Wsk. Wykazać że dla każdej macierzy symetrycznej i dodatnio określonej $P$ istnieje (wyznaczona jednoznacznie) macierz symetryczna i dodatnio określona $Q$, taka że $Q^2 = P$.

**8.8** Niech $A$ będzie macierzą symetryczną i dodatnio określoną, a $B$ ortogonalną (tzn. $B\,B^T = I$). Wykazać, że
(i) jeśli $AB$ i $BA$ są symetryczne i dodatnio określone, to $B = I$.
(ii) jeśli $AB$ i $BA$ są ortogonalne, to $A = I$.

**8.9** Wskazać bijekcję pomiędzy zbiorem iloczynów skalarnych w $\mathbb{R}^n$ a zbiorem $\mathbb{R}^n_{>0} \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

**8.10** Niech $1 \leq k < n$ oraz niech $\phi$ będzie przekształceniem liniowym $\mathbb{R}^n$. Załóżmy,że $\phi$ zachowuje objętość k-wymiarowych równoległoboków. Udowodnić, że $\phi$ jest izometrią.

**8.11** Wykazać, że

$$O(n) \times T_+ \to GL_n(\mathbb{R})$$
$$(A, B) \mapsto AB$$

jest bijekcją. ($O(n)$ to macierze ortogonalne, a $T_+$ macierze górnotrójkątne z wyrazami dodatnimi na przekątnej.)

**8.12** Udowodnić analogiczny fakt dla macierzy zespolonych.

**8.13** Czy

$$T_+ \to \{iloczyny\ skalarne\}$$
$$A \mapsto A^T A$$

jest bijekcją?

**8.14** Znaleźć bijekcję

$$GL(\mathbb{R}^3) \quad \simeq \quad \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^6.$$

# 9 Objętość i odległość

**9.1** Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisana równaniami $x_1 = x - 2$, $x_3 = x_4$ oraz niech $L = \{[1, -1, 1, -1] + t(1, 1, 1, 2) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Znaleźć odległość $V$ od $L$.

**9.2** Niech $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ będzie standardowym sympleksem, tj. rozpiętym przez wektory bazowe $\varepsilon_i$. Obliczyć objętość $\Delta^n$.

**9.3** Niech $A$ i $B$ będą rozłącznymi ścianami w $\Delta^n$ wymiarów $k$ i $n - k - 1$. Znaleźć ich odległość.

**9.4** Niech $V$ będzie przestrzenią euklidesową wymiaru $n$. Niech $S$ będzie sympleksem o wierzchołkach $p_0, p_1, \dots p_n$ takich, że $|p_i - p_j| = 1$ dla $i \neq j$. Wyznaczyć wysokość sympleksu $h_n$. Obliczyć $\lim_{n \to \infty} h_n$.

**9.5** Niech $\Delta(a_0, a_1, \dots a_n)$ oznacza sympleks rozpięty przez odpowiednie wierzchołki. Znaleźć związek (np $\leq$) pomiędzy objętościami $|\Delta(a_0, a_1, \dots a_n)|$, $|\Delta(b_0, b_1, \dots, b_m)|$, $|\Delta(a_0, a_1, \dots a_n, b_0, b_1, \dots, b_m)|$ i odległością $h = d(\Delta(a_0, a_1, \dots a_n), \Delta(b_0, b_1, \dots, b_m))$. (Dla $m = 0$ mamy $|\Delta(a_0, a_1, \dots a_n, b_0)| = \frac{1}{(n+1)!} h |\Delta(a_0, a_1, \dots a_n)|$.)

**9.6** Dane niezerowe wektory $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in V$ takie, że $|\measuredangle(\alpha_i, \alpha_j)| > \frac{\pi}{2}$. Wykazać, że $\dim V \geq n-1$.

**9.7** Niech $A$ będzie nieujemnie określoną macierzą symetryczną z ujemnymi wyrazami poza przekątną. Udowodnić, że $rz(A) \geq n-1$.

**9.8** Dana macierz symetryczna dodatnio określona postaci $E = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$. Udowodnić, że $\det E \leq \det A \det C$.

**9.9** Niech $E$ będzie przestrzenią euklidesową. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to by liczby $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ były odległościami układu punktów $p_i \in E$, tzn $a_{i,j} = d(p_i, p_j)$.

**9.10** Niech $\in \mathbb{R}^3$. Udowodnić formułę na rzut na $(\mathrm{lin}\{a\})^\perp$ w $\mathbb{R}^3$

$$\pi(b) = b \times (a \times b)/|b|^2 .$$

**9.11** Udowodnić, że dla wektorów w $\mathbb{R}^3$ zachodzi
- $(a \times b, c) = (b \times c, a)$.
- $|a \times b|^2 + (a,b)^2 = |a|^2|b|^2$
- $((a+b), ((a+c) \times b)) = -(a, (b \times c))$
- $((a+2b-c), ((a-b) \times (a-b-c))) = 3(a, (b \times c))$
- $(a \times b) \times (c \times d) = ((a \times c), d)b - ((b \times c), d)a$
- $a \times (b \times c) - (a \times b) \times c = (b,c)a - (a,b)c$

# 10 Przekształcenia samosprzężone

**10.1** Wykazać, że funkcje $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ stanowią układ ortogonalny wektorów własnych samosprzężonego operatora $\frac{d^2}{dx^2}$ w przestrzeni funkcji ciągłych o okresie $2\pi$ z iloczynem skalarnym $(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$

**10.2** Niech $A$ będzie liniowym operatorem. Wykazać, że $A^TA$ jest ma wartości własne rzeczywiste nieujemne. Wywnioskować (nie rozwiązując równań różniczkowych), że warości własne Laplasjanu $\Delta : C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1)$ są niedodatnie.

**10.3** Udowodnić, że jeśli $\phi$ i $\psi$ są przekształceniami samosprzężonymi oraz są ze sobą przemienne, to $\phi\psi$ też jest samosprzężone. Wykazać, że przemienność jest konieczna.

**10.4** Niech $\phi$ będzie przekształceniem samosprzężonym. Wykazać, że $ker\, \phi \perp im\, \phi$ oraz $ker\, \phi$ i $im\, \phi$ rozpinają całą przestrzeń (ortogonalna suma prosta).

# 11 Tensory

**11.1** Dane $\phi \in End(V)$ oraz $\psi :\in End(W)$. Znamy ich postacie Jordana. Jaka jest postać Jordana przekształcenia $\phi \times \psi \in\in End(V \otimes W)$?

**11.2** Dane $\phi \in End(V)$ oraz $\psi :\in End(W)$. Wyrazić $tr(\phi \otimes \psi)$ i $\det(\phi \otimes \psi)$ za pomocą niezmienników $\phi$ i $\psi$.

**11.3** Dana forma kwadratowa $\phi$ na przestrzeni wektorowej $V$. Definiujemy algebrę Cliforda

$$Cl(q) = (\mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \ldots) / \sim,$$

gdzie $\sim$ jest relacją równoważności generowaną przez $\alpha \otimes \alpha \sim q(\alpha)$. Znaleźć $\dim(Cl(q))$ (nie zależy on od $q$).

**11.4** Przedstawić $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ jako algebry Cliforda dla odpowiednio dobranych kwadratowych form rzeczywistych.

# ZADANIA TRUDNIEJSZE

## 12 Kwaterniony

**12.1** Niech

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Udowodnić

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \mathbf{i}\,\mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\,\mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\,\mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

**12.2** Niech

$$\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}.$$

Udowodnić, że w $\mathbb{H}$ każdy element różny od zera jest odwracalny. Na ile sposobów można zanurzyć ciało $\mathbb{C}$ w $\mathbb{H}$?

**12.3** Przekonać się, że na $\mathbb{H}$ forma 2-liniowa $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}Tr(x\bar{y}^T)$ przyjmuje wartości rzeczywiste i jest iloczynem skalarnym. Sprawdzić, że $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jest bazą ortonormalną. Niech $S^3$ będzie sferą jednostkową. Udowodnić $S^3 = SU(2)$.

**12.4** Niech

$$im\,\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}.$$

Grupa $SU(2)$ działa na $im\,\mathbb{H}$:

$$x \mapsto qxq^{-1}$$

dla $x \in im\,\mathbb{H}$, $q \in SU(2)$ (sprarawdzić, że wynik działania należy do $im\,\mathbb{H}$). Wykazać, że to działanie zachowuje iloczyn skalarny w $im\,\mathbb{H}$. Wykazać że otrzymujemy przekształcenie $SU(2) \to SO(3)$ takie, że przeciwobraz każdego elementu jest dwulelementowy.

**12.5** Wyrazić mnożenie w kwaternionach za pomocą iloczynu skalarnego i wektorowego w $im\,\mathbb{H}$.

## 13 Zadania o oktonionach

**13.1** Niech $a, b \in \mathcal{O}$. Sprawdzić, że

$$\|a\|^2 = a\,\bar{a} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

i udowodnić:

$$\|a\,b\| = \|a\|\,\|b\|.$$

**13.2** Udowodnić, że dla $a, b \in \mathcal{O}$ mamy

$$a\,(b\,b) = (a\,b)\,b\,, \qquad a\,(a\,b) = (a\,a)\,b\,.$$

**13.3** Niech $a, b \in \mathcal{O}$, $||a|| = ||b|| = 1$, $a \perp b$. Wykazać, że istnieje automorfizm oktonionów przeprowadzający $a$ na $e_1$ i $b$ na $e_1$ (gdzie $e_i$ dla $i = 1, 2, \ldots 7$ standardowa baza $im\,\mathcal{O}$).

## 14 Zadania o expie : $M(n \times n, \mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$

Wykazać:

**14.1** Jesli $[A, B] = 0$, to $e^A e^B = e^{A+B}$

**14.2** $det(e^A) = e^{tr\,A}$

**14.3** Niech $Log(I + A) = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + \ldots$. Sprawdzić, że

$$Log(e^{tA}e^{tB}) = t(A+B) + \frac{1}{2}t^2[A,B] + \frac{1}{12}t^3(\pm[A,[A,B]] \pm [B,[B,A]]) + t^4\,????$$

Ustalić znaki i wyrazić wyrazy przy $t^4$ za pomocą komutatorów.
(Wzory Bakera-Campbella-Hausdorffa.)

**14.4** Wykazać, że wyrazy szeregu $Log(e^{tA}e^{tB})$ można wyrazić za pomocą $A$, $B$ i operacji komutatora.

**14.5** Sprawdzić, że
$exp$: Macierze symetryczne $\to$ symetryczne, dodatnio określone
$exp$: Macierze antsymetryczne $\to$ ortogonalne
jest przekształceniem ,,na".

**14.6** Niech $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ oznacza zbiór macierzy o śladzie 0. Czy $exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to SL_2(\mathbb{R})$ jest epimorfizmem?

**14.7** Obliczyć exp od klatki Jorana używając rozkładu na część półprostą i nilpotentną. Zobaczyć, że w wyniku dostajemy multiplikatywny rozkład na część półprostą i unipotentną.

**14.8** Niech $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \in M(2n \times 2n, \mathbb{R})$. Definiujemy

$$Sp(n) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \,|\, AJA^T = J\},$$

$$\mathfrak{sp}(n) = \{A \in M(2n \times 2n, \mathbb{R}) \,|\, AJ + JA^T = 0\}.$$

Udowodnić, że $\exp(\mathfrak{sp}(n)) \subset Sp(n)$.

**14.9** Niech $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Definiujemy

$$G_B = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \,|\, ABA^T = B\},$$

$$\mathfrak{g}_B(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \,|\, AB + BA^T = 0\}.$$

Udowodnić, że $\exp(\mathfrak{g}_B) \subset G_B$. Ponadto macierze $A \in G_B$ dostatecznie bliskie $I$ są w obrazie.

Wsk. Najpierw rozpatrzeć $B$ odwracalne, a potem $\begin{pmatrix} B & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

# 15 Funkcje Schura

Definiujemy funkcję Schura dla $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$

$$S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = W_\lambda / W_{\underline{0}}$$

gdzie

$$W_\lambda = \det\left((x_i^{\lambda_j + n - j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}\right).$$

**15.1** Dla przykładu policzyć
$S_{3,1,0} = x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + 2x_1^2x_2x_3 + 2x_1x_2^2x_3 + x_2^3x_3 + x_1^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + x_1x_3^3 + x_2x_3^3$

**15.2** Wykazać, że funkcja $S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest wielomianem zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$. Ponadto dla dowolnej permutacji $\sigma$:

$$S_\lambda(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Mówimy, że funkcja $S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest symetryczną funkcją zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

**15.3** Sprawdzić, że jeśli $\lambda = (1, 1, 1, .., 1, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ ($k$-jedynek) to $S_\lambda$ jest elementarną funkcją symetryczną

$$e_k = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}.$$

Przedstawić $h_k := S_{k,0,0,\ldots,0}$ jako sumę jednomianów.

**15.4** Mamy

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)=\sum_{k=0}^{n}e_k.$$

Wykazać

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}=\sum_{k=0}^{\infty}h_k.$$

**15.5** Przyjmujemy konwencję $h_i=0$ dla $i<0$. Udowodnić:

$$S_\lambda = det\begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & h_{\lambda_1+2} & \dots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & h_{\lambda_2+1} & \dots & h_{\lambda_2+n-2} \\ h_{\lambda_3-2} & h_{\lambda_3-1} & h_{\lambda_3} & \dots & h_{\lambda_2+n-3} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ h_{\lambda_n-n+1} & h_{\lambda_n-n+2} & h_{\lambda_n-n+3} & \dots & h_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

**15.6** Wykazać, że funkcje Schura stanowią bazę przestrzeni wielomianów symetrycznych zmiennych $x_1,x_2,\dots,x_n$.

**15.7** . Wykazać że dla $k<n$ mamy

$$S_\lambda(x_1,x_2,\dots,x_k,0,\dots,0)=0$$

jesli $\lambda_{k+1}>0$, oraz

$$S_\lambda(x_1,x_2,\dots,x_k,0,\dots,0)=S_\lambda(x_1,x_2,\dots,x_k)$$

w przeciwnym przypadku.

**15.8** Udowodnić, że każda funkcja Schura jest kombinacją jednomianów z nieujemnymi współczynnikami.

# 16 Zadania kategoryjne

**16.1** Udowodnić dla $U,W\subset V$:

$$(U+W)/U=W/(U\cap W).$$

**16.2** Niech $\phi:W\to V$ będzie przekształceniem liniowym. Kojądro $coker(\phi)$ definiujemy poprzez własność uniwersalną.

$$\begin{tikzcd} & & coker(\psi) \arrow[d, dotted, "\exists!\overline{\psi}"] \\ W \arrow[r, "\psi"] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "0"'] & V \arrow[ur, "\pi"'] \arrow[dr, "\forall\psi"] & \\ & & U \end{tikzcd}$$

Udowodnić $coker(\phi)\simeq V/im(\phi)$

**16.3** Zweryfikować kategoryjną definicję jądra:

$$\begin{tikzcd} & & ker(\psi) \arrow[dl, "\pi"] \arrow[dll, "0"'] \\ W & V \arrow[l, "\psi"'] & \\ & & U \arrow[ul, "\forall\psi"'] \arrow[ull, "0"] \arrow[uu, dotted, "\exists!\overline{\psi}"'] \end{tikzcd}$$

**16.4** Kategoryjna definijcja produktu: Jeśli $V$ wraz z przekształceniami $\pi_1$, $\pi_2$ spełnia warunek *dla dowolnej przestrzeni $U$ oraz przekształceń $\phi_i$, $\phi_j$ istnieje dok:ladnie jedno przekształcenie $\psi$, takie, że $\phi_i = \pi_i\psi$ dla $i = 1, 2$*

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 & \\
U \arrow[ur, "\forall\phi_1"] \arrow[rr, dotted, "\exists!\,\psi"] \arrow[dr, "\forall\phi_2"'] & & V \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & V_2 &
\end{tikzcd}$$

wtedy $V \simeq V_1 \times V_2$.

**16.5** Sformułować definicję zewnętrznej sumy prostej (koproduktu):

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \arrow[dl, "\forall\phi_1"'] \arrow[dr, "i_1"] & \\
U & & V \arrow[ll, dotted, "\exists!\,\psi"'] \\
 & V_2 \arrow[ul, "\forall\phi_1"] \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Pokazać, że w świecie przestrzeni liniowych zewnetrzna suma prosta jest izomorficzna z $V_1 \times V_2$, ale tak nie jest w świecie zbiorów.

**16.6** Wiadomo, że algebra tensorowa

$$T_0 V = \bigoplus_{i\geq 0} V^{\otimes i}$$

ma własność uniwersalną

$$\mathrm{Hom}_{\text{prestrzenie wektorowe}}(V, A) = \mathrm{Hom}_{\text{algebry}}(T_0(V), A)\,.$$

Znaleźć własność uniwersalną charakteryzującą $S^\bullet V$.

**16.7** Znaleźć własność charakteryzującą algebrę zewnętrzną $\Lambda^\bullet V$. (Wsk: rozpatrzeć superalgebry przemienne, tzn. algebry $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{F}_2} A_i$ w których zachodzi $a \cdot b = (-1)^{ij} b \cdot a$ jeśli $a \in A_i$, $b \in A_j$.)

**16.8** Rozważmy DSCA – przemienne superalgebry z różniczką, tzn. superalgebry wyposażone w przekształcenie liniowe $d : A \to A$ spełniające $d \circ d = 0$ takie, że dla $a \in A_i$ mamy $d(a) \in A_{i+1}$ oraz $d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + (-1)^i a \cdot d(b)$. Gdy $A = \Lambda^\bullet V^*$ dla wybranego wektorem $v \in V$ przyjmujemy $d(\xi) := \mathrm{i}_v \xi$. Pokazać, że to jest DSCA. *Uwaga*: dobieramy taką konwencję iloczynu $\wedge$, zwężenia $\mathrm{i}_v$ oraz izomorfizmu $\Lambda^\bullet V^* \simeq (\Lambda^\bullet V)^*$ tak, abyśmy dla bazy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ przestrzeni $V$ mieli

$$\mathrm{i}_{e_j}(e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}) = \begin{cases} (-1)^{\ell+1} \overbrace{e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}}^{\text{wyrzucone } e_{i_\ell}} & \text{gdy} \quad j = i_\ell \\[2ex] 0 & \text{gdy} \quad j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \end{cases}$$

gdzie $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

**16.9** Dla danej przestrzeni wektorowej $V$ skonstruować przemienną superalgebrę z różniczką $?(V)$ mający uniwersalną własność:

$$\mathrm{Hom}_{\text{prestrzenie wektorowe}}(V, A_0) = \mathrm{Hom}_{\text{DSCA}}(?(V), A)\,.$$

## 17 Inne

**17.1** Niech $0 < m < n$ będą liczbami naturalnymi. Definiujemy $W(q) = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{q^n - q^i}{q^m - q^i}$. Wykazać, że $W(q)$ jest wielomianem, $W(q) = \sum_{i=0}^{m(n-m)} a_i q^i$, gdzie $a_i$ jest równe ilości takich ciągów liczb naturalnych $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m \leq n$, że $\sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - j) = i$. (W szczególności $a_i > 0$.)

*Wskazówka:*

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**17.2** Niech $\mathcal{D}$ będzie algebrą operatorów różniczkowych, czyli algebrą rozpiętą przez symbole $q_1, q_2, \dots q_n$ i $p_1, p_2, \dots p_n$, które są ze sobą przemnienne oprócz pary $p_i$ i $q_i$

$$[p_i, q_i] = 1 \, .$$

Mamy filtrację stopniem operatora

$$F_i\mathcal{D} = \{ P \in \mathcal{D} \ : \text{w przedstawieniu } P \text{ iloczyny } p_i \text{ są długości} \leq i \ \}$$

i obiekt ,,zgradowany"

$$Gr_i\mathcal{D} = F_i\mathcal{D}/F_{i-1}\mathcal{D} \, , \quad Gr_\bullet\mathcal{D} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Gr_i\mathcal{D} \, .$$

Sprawdzić, że

$$Gr_\bullet\mathcal{D} \simeq S^\bullet(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) \simeq S^\bullet(\mathbb{R}^{2n}) \, .$$

Wykazać, że komutator $[P, Q]$ zadaje pewną operację (oznaczaną $\{P, Q\}$) w $Gr_\bullet\mathcal{D}$. Utożsamiając $S^\bullet(\mathbb{R}^{2n})$ z funkcjami wielomianowymi wyrazić $\{P, Q\}$ za pomocą mnożenia i różniczkowania po $p_i$ i $q_i$.

Link: http://pl.wikipedia.org/wiki/Nawias_Poissona