Zadania z GAL-u

Listopad 2004

1 Rozwiązać układy równań:

1.1 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ $\qquad -1/7, 3/7$

1.2 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{cases}$ $\qquad 2, -1, 1$

1.3 $\begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$ $\qquad 0, 2, -3$

1.4 $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$ $\qquad 8/7, -1/7, -3/7$

1.5 $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ 6x + 4y + 3z + 2t = 2 \end{cases}$ $\qquad 1, -2, 0, 2$

1.6 $\begin{cases} x - 2y + 3s + t = 1 \\ 2x - 3y + z + 8s + 2t = 3 \\ x - 2y + z + 3s - t = 1 \\ y + 3s + 5t = 0 \\ x - 2y + 5s + 8t = -1 \end{cases}$ $\qquad 10, 3, 0, -1, 0$

1.7 $\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1 \end{cases}$ $\qquad$ sprzeczny

1.8 $\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{matrix} x = -1 - t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{matrix}$

1.9 $\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1 \end{cases}$ $\qquad \begin{matrix} x = \frac{1}{7} - \frac{3}{7}z + s - t \\ y = \frac{1}{7} + \frac{4}{7}z - s \end{matrix}$

1.10 $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 2 & -4 \\ 7 & 8 & 1 & -7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$ $\qquad$ sprzeczny

1.11 $\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & -2 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & -5 & 1 & 17 \\ 6 & 5 & 3 & -2 & -9 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -5 & -10 & 12 \end{array}\right]$ $y = 7/2 + s, z = -4 - 2x - s, t = 1/2$

1.12 $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -5 \\ 5 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ -7 & -3 & 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right]$ $x = -1 + t, y = 4 - t, z = 1 - t$

1.13 $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 4 & 0 & 10 \\ -2 & 6 & 4 & 4 & 1 & 10 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right]$ $x = -5 + 3y + z + 2s, t = -2z$

1.14 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \end{array}\right]$ dla a, b $c \in \mathbb{R}$.

1.15 Niech a, b, c będą trzema różnymi liczbami rzeczywistymi. Znaleźć wielomian kwadratowy $W(x) = \lambda x^2 + \mu x + \nu$, taki, że $W(a) = 7$, $W(b) = 4$ i $W(c) = 9$.

1.16 $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & c & c \end{array}\right]$ dla a, b $c \in \mathbb{R}$.

1.17 W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$ powiedzieć czy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie / ma wiele rozwiązań / jest sprzeczny:

$$\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & a-1 \\ x & + & y & + & az & = & \\ x & + & ay & + & z & = & 1-a \end{cases}$$

2 Ciała

2.1 Udowodnić, że w dowolnym ciele są prawdziwe następujące tożsamości
(i) $-(-x) = x$,
(ii) $-(x + y) = (-x) + (-y)$,
(iii) $(-x)y = -xy$,
(iv) $(x - y)z = xz - yz$, gdzie $x - y := x + (-y)$.

2.2 Niech $p > 1$ będzie liczbą naturalną. W zbiorze $F_p = \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$ definiujemy działania $a \oplus b = (a + b)\ mod\ p$ oraz $a \odot b = (a \cdot b)\ mod; p$. Znaleźć p dla których $(F_p, 0, 1, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

2.3 Niech $F = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. Zdefiniować w F działania, tak by otrzymać ciało.

2.4 Sprawdzić łączność mnożenia na liczbach zespolonych.

2.5 Znaleźć element odwrotny do $a + bi \in \mathbb{C}$.

2.6 Skonstruować geometrycznie element odwrotny w $\mathbb{C}$.

3 Liczby zespolone

3.1 W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania
a) $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$,
b) $z^2 - 4z + 13 = 0$,
c) $\frac{1}{z} = \frac{1-z}{1}$,
d) $z^8 = 1$,
e) $z^{12} = 1$,
f) $z^7 = \overline{z}$,
g) $z^4 = (1-i)^4$,
h) $(z-1)^6 = (i-z)^6$,
i)* $z^5 = 1$.

3.2 Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór liczb spełniających warunek:
a) $Re(iz+2) > 0$,
b) $(\overline{z-i})^2 = (z-i)^2$,
c) $Im\frac{1+iz}{1-iz} = 1$,
d) $\left|\frac{z-2i}{z+1}\right| = 1$,
e) $arg(z^6) = \pi$,
f) $arg(\overline{z} - 1 - 2i) = \frac{3\pi}{2}$,
g) $|z|^3 = iz^3$,
h) $im(iz^4+2) \geq 0$.

3.3 Zapisać w postaci trygonometrycznej liczby
a) $-2+2i$,
b) $\sqrt{3} - i$,
c) $-5 + 5\sqrt{3}i$.

3.4 Obiliczyć wyrażenia (wynik w postaci $a+bi$)
a) $(1-i)^{12}$,
b) $(1+\sqrt{3}i)^8$,
c) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-\sqrt{3}i)^6}$.

3.5 Korzystając ze wzoru Moivre'a wyrazić $\cos(7x)$ przez funkcje $\cos(x)$.

3.6 Obiczyć
a) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$
(wsk. ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego),
b) $\binom{2n}{0} - \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} - \ldots + (-1)^n \binom{2n}{2n}$.

4 Przestrzenie liniowe i podprzestrzenie

4.1 Niech $C(\mathbb{R})$ będzie zbiorem funckcji ciągłych $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z działaniem dodawania i mnożeniem przez stałą. Sprawdzić, że $C(R)$ jest przestrzenią liniową.

4.2 Które podzbiory $C(\mathbb{R})$ są podprzestrzeniami liniowymi?
a) wielomiany?
b) funkcje spełniające $f(0) = 1$?
c) funkcje spełniające $f(1) = 0$?
d) funkcje spełniające $f(x) = f(-x)$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$?
e) funkcje spełniające $f(x) > 0$ dla $x > 0$?
f) funkcje spełniające: f jest dwukrotnie różniczkowalna i $f = -f''$?
g) funkcje okresowe?
h) funkcje okresowe o okresie T?

4.3 Ile jest podprzestrzeni liniowych w $(\mathbb{F}_2)^3$? Opisać je równaniami.

4.4 Ile jest podprzestrzeni liniowych w $(\mathbb{F}_p)^n$?

4.5 Czy wektor $(1, 1, 1)$ należy do podprzestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ rozpiętej przez $(1, 3, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 3)$? A wektor $(1, 4, 3)$?

4.6 Udowodnić, że każdy wektor przestrzeni $\mathbb{C}^4$ rozpiętej na wektorach

$$(i, 1, -i, -1),\ (i, -i, 1, -1),\ (1, 0, 0, -1)$$

spełnia warunek: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Natomiast nie każdy spełnia $x_4 = -1$.

4.7 Opisać równaniami najmniejszą podprzestrzeń liniową zawierającą wektory:
a) $(1, -1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(2, 0, 1, 1)$ w $\mathbb{R}^4$,
b) $(1, -1, 1, -1, 1),\ (1, 1, 0, 0, 3),\ (3, 1, 1, -1, 7),\ (0, 2, -1, 1, 2)$ w $\mathbb{R}^5$.

4.8 Wykazać, że przecięcie $V_1 \cap V_2$ dwu podprzestrzeni liniowych jest podprzestrzenią liniową.

4.9 Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami liniowymi V. Wykazać, że najmniejszą podprzestrzenią liniową zawierającą $V_1 \cup V_2$ jest *suma algebraiczna* $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \in V : v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$.

4.10 Niech A, B_1, B_2 będą podprzestrzeniami liniowymi V.
a) Czy prawdziwa jest formuła $A \cap (B_1 + B_2) = (A \cap B_1) + (A \cap B_2)$?
b) Załóżmy dodatkowo, że $B_1 \subset A$. Czy już będzie dobrze?
c) A może wystarczy $A \subset B_1$?

4.11 Znaleźć takie wartości $a \in \mathbb{F}$, by wektory $(a, 1, 0)$, $(1, a, 3)$, $(a, 1, 1) \in \mathbb{F}^3$ były liniowo zależne.

4.12 Udowodnić, że istnieje nieprzeliczalny liniowo niezależny podzbiór w przestrzeni funkcji $(\mathbb{F}_2)^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{F}_2\}$.

5 Układy wektorów, bazy

5.1 Czy te układy wektorów są liniowo niezależne?

a) $(1,1,0),\ (1,2,-3),\ (2,4,1)$ w $\mathbb{R}^3$;

b) $(1,2,1,1),\ (2,-1,-1,4),\ (5,5,2,7)$ w $\mathbb{R}^4$;

c) $(3,2,1,-1),\ (5,-1,1,2),\ (7,8,1,-7),\ (1,-1,1,2)$ w $\mathbb{R}^4$.

5.2 Czy te układy wektorów rozpinają całą przestrzeń?

a) $(3,1,1),\ (1,0,2),\ (0,3,2)$ w $\mathbb{R}^3$;

b) $(3,1,0,-2),\ (5,2,2,-1),\ (1,-1,0,-2),\ (5,1,1,-3),\ (-7,-3,1,5),$
$(4,1,-2,-5)$ w $\mathbb{R}^4$;

c) $(1,1,1)\ ,(a,b,c)\ ,(a^2,b^2,c^2)$ w $\mathbb{R}^3$ dla $a,\ b\ c \in \mathbb{R}$.

5.3 Znaleźć bazy przestrzeni liniowych rozpiętych na wektorach w zadaniach 5.1 i 5.2.

5.4 Znalźć bazy przestrzeni liniowych opisanych przez równania:

a) $x+y+z+t+s=0$ w $\mathbb{R}^5$;

b) $\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & z & - & 2s & + & t & = & 0 \\ 3x & + & 4y & - & z & + & s & + & 3t & = & 0 \\ x & - & 8y & + & 5z & - & 9s & + & t & = & 0 \end{array}\right.$ w $\mathbb{R}^5$;

c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$ w $\mathbb{R}^4$.

5.5 Znaleźć bazę podprzestrzeni liniowej wielomianów spełniających:

a) $f(1)=f(2)=0$;

b) $f^{(3)}(7)=0$ (trzecia pochodna).

6 Układy wektorów, bazy II

6.1 Wykazać, że jeśli $char(\mathbb{F}) \neq 2$ to dla dowolnych wektorów $v, w \in V$ zachodzi $lin(v+w, v-w) = lin(v, w)$.

6.2 wyznaczyć wszystkie watrości parametru p, tak by układ $(2, p, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 3)$ był liniowo niezależny.

6.3 Dane są wektory $\alpha_1 = (-1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 2)$, $\alpha_3(t) = (-3, t, 0)$.
a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ układ α_1, α_2, $\alpha_3(t)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$?
b) dla każdego t takiego jak w a) znaleźć współrzędne wektora $\beta = (1, 1, -1)$ w tej bazie.
c) Dla jakich wartości t wektor $\alpha_3(t)$ jest kombinacją liniową α_1 i α_2? Znaleźć tą kombinację.

6.4 Niech V będzie przestrzenią liniową, $\beta \in V$ oraz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym. Wykazać że $\beta \in lin(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny.

6.5 Niech $\alpha_1 = (1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (2, 2, 1)$, $\alpha = (-3, 0, 1)$. Znaleźć (jeśli istnieje) taki wektor α_3, że układ α_1, α_2, α_3 jest bazą $\mathbb{R}^3$ i wektor α ma w tej bazie współrzędne 2,-3, 1.
b) to samo polecenie gdy $\beta = (3, 5, 2)$.

6.6 Dane wektory w $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\beta_1 = (1, -1, 1)$, $\beta_2 = (4, 1, 2)$. Opisać $lin(\alpha_1, \alpha_2) \cap lin(\beta_1, \beta_2)$.

6.7 Dane dwie podprzestrzenie w $\mathbb{R}^4$:

$$V = \begin{cases} x & +2y & & -3w & = & 0 \\ x & +y & -2z & & = & 0 \end{cases}, \qquad W = \begin{cases} 3x & +y & -z & -3w & = & 0 \\ x & +y & -z & -w & = & 0 \end{cases}$$

Opisać równaniami $V + W$. Znaleźć wymiary przestrzeni $V + V$ i $V \cap W$.

6.8 Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią liniową. Wykazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ można dopełnić do bazy wektorami z W wtedy i tulko wtedy gdy: 1) jest układem liniowo niezależnym oraz 2) $Lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) + W = V$.

6.9 Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Czy wektory $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 2)$ można dopełnić wektorem $\beta \in W$ do bazy $\mathbb{R}^4$.

6.10 Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Znaleźć równanie przestrzeni zawierającej W i wektor $(1, 1, 1, 2)$.

7 Sumy proste, przekształcenia

7.1 Niech U, $V \subset \mathbb{R}^n$ będą określone układami równań:

$$U = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\} \qquad V = \{x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}\,.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ orza wyznaczyć rzuty wektorów jednostkowych na U równolegle do V.

7.2 W przestrzeni R^4 określamy podprzestrzenie

$$U = lin\{(1,1,1,1),(-1,-2,0,1)\}\,, \qquad V = lin\{(-1,-1,1,-1),(2,2,0,1)\}\,.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ i znaleźć rzut wektora $(4,2,4,4)$ na U równolegle do V.

7.3 Niech U i W będą podprzestrzeniami liniowymi V. Załóżmy, że $\dim V < \infty$ oraz $\dim U + \dim W = \dim V$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
1) $V = U \oplus W$;
2) $V = U + W$;
3) $U \cap W = \{0\}$.

7.4 Niech $V = U \oplus W$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą U i $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ będzie bazą W. Wykazać, że $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ jest bazą V.

7.5 Znaleźć wzór na obrót $\mathbb{R}^3$ w płaszczyźnie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ o kąt $2\pi/3$.

7.6 Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $f(1,3) = (2,4,1)$ i $f(2,1) = (5,3,2)$. Znaleźć $f(1,1)$.

7.7 Niech $F : W \to V$ będzie reprezentowane przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ względem pewnych baz (e_1, e_2, e_3) w przestrzeni V i (f_1, f_2) w W. Wyznaczyć macierz odwzorowania F względem baz $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ i $(f_1, f_1 + f_2)$.

7.8 Niech f będzie niezerową funkcją liniową $V \to \mathbb{K}$. Niech $U = ker\, f$. Wykazać, że $V = U \oplus lin\{v\}$ dla dowolnego $v \in V \setminus U$.

7.9 Znaleźć przykłady przekształceń $f : V \to V$ pewnej przestrzeni (koniecznie nieskończenie wymiarowej) takie, że
a) jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem,
b) jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem.

7.10 Znalźć jądro i obraz przekształcenia $\phi : K[x] \to K[x]$, $\phi(f) = f - f'$

7.11 Niech $f_i : V_i \to V_{i+1}$ dla $i = 0, \ldots, n$ będzie ciągiem przekształceń liniowych, takim, że $im\, f_i = ker\, f_{i+1}$, $V_0 = 0$ i $V_{n+1} = 0$. Udowodnić, że $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$.

8 Przekształcenia liniowe II, izomorfizmy

8.1 Określić taki izomorfizm $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, że $f(e_1 + 2e_2) = e_2 + e_3$.

8.2 Niech $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$. Czy f jest izomorfizmem? Jeśli tak, to znaleźć przekształcenie odwrotne.

8.3 Oznaczmy przez $M(n \times n)$ przestrzen liniową macierzy kwadratowych rozmiaru n. (Jaki jest jej wymiar?). Niech

$$T : M(n \times n) \to M(n \times n)$$

będzie transpozycją, tzn. przekształceniem zadanym wzorem

$$T\left(\{a_{i,j}\}_{1 \le j,j \le n}\right) = \{a_{j,i}\}_{1 \le j,j \le n}\,.$$

Znaleźć jądra i obrazy przekształceń $S = \frac{1}{2}(Id + T)$ i $A = \frac{1}{2}(Id - T)$.

8.4 Rozważamy podprzestrzenie $W_k \subset \mathbb{K}^n$ dla $k = 1, 2 \ldots n$:

$$W_k = \{x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0\}\,.$$

Opisać wszystkie f izomorfizmy $\mathbb{K}^n$ takie, że $f(W_k) \subset W_k$

8.5 Udowodnić, że jeśli $\dim V < \infty$, to $W_1 \oplus V \simeq W_2 \oplus V$ wtedy i tylko wtedy gdy $W_1 \simeq W_2$. Podać kontrprzykład, gdy $\dim V = \infty$.

8.6 Dane dwie podprzestrzenie $W_1, W_2 \subset V$. Załóżmy, że $\dim W_1 = \dim W_2$. Czy zawsze istnieję taki izomorfizm f przestrzeni V, że $f(W_1) = W_2$?

8.7 Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, a $J : V \to V$ przekształceniem, takim, że $J^2 = -Id_V$. Wprowadzić w V strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$, tak, że mnożenie przez $i \in \mathbb{C}$ jest przekształceniem J. Wywnioskować, że jeśli $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, to $\dim_{\mathbb{R}} V$ jest parzysty.

8.8 Dane przekształcenia $f : V \to W$ i $g : W \to V$. Załóżmy, że $f \circ g = Id_W$. Czy f jest izomorfizmem?

9 Macierze

Oznaczenie: $M(m \times n; \mathbb{K})$ oznacza zbiór macierzy wymiaru $m \times n$ o wyrazach z $\mathbb{K}$.

9.1 Znaleźć macierz $Y \in M(3 \times 3; \mathbb{K})$ taką, że

$$2Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

9.2 Dla $a, t \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ obliczyć $\begin{pmatrix} a & t & 0 \\ 0 & a & t \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n$.

9.3 Znaleźć $X \in M(2 \times 2; \mathbb{K})$ spełniające równanie

$$a)\ X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b)\ X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

9.4 Udowodnić że dla $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$(A + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k .$$

Czy analogiczny wzór zachodzi dla $(A + B)^n$?

9.5 a) Znaleźć wszystkie macierze $X \in M(3 \times 3; \mathbb{K})$ spełniające równanie

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X .$$

b) Znaleźć macierze przemienne ze wszystkimi macierzami wymiaru 3×3.

9.6 Niech $\mathbf{T}$ będzie zbiorem macierzy diagonalnych 2×2 postaci $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ dla pewnych elementów $a, b \in \mathbb{K}$. Znaleźć wszystkie macierze odwracalne $X \in M(2 \times 2; \mathbb{K})$ spełniające warunek:
$X \cdot A \cdot X^{-1} \in \mathbf{T}$ dla wszystkich $A \in \mathbf{T}$.

Macierz zamiany współrzędnych od bazy A do bazy B przestrzeni V: *macierz identyczności V w bazach A i B (wektory A wyrażamy jako kombinaje liniowe wektorów B i otrzymane współrzędne ustawiamy w kolumnach).*

9.7 Niech $\alpha_1 = (1, 2)$, $\alpha_2 = (4, 1)$. Znaleźć macierz przejścia z bazy α_1, α_2 do bazy standardowej i ze standardowej do α_1, α_2. Niech $\beta_1 = (1, 1, 1)$, $\beta_2 = (2, 1, 3)$, $\beta_3 = (1, 0, 5)$. Znaleźć macierz przekształcenia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y, z) = (x + 2y, y + 3z)$ w bazach β_i i α_i. (Oznaczamy ją $M\phi^{\beta}_{\alpha}$.)

9.8 To samo dla $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\alpha_1 = (1, 4, 9)$; $\beta_1 = (1, 2)$, $\beta_2 = (3, 1)$ $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$

9.9 Pokazać. że transpozycja iloczynu jest równa iloczynowi transpozycji w odwrotnej kolejności.

10 Przekształcenia liniowe, zadania banalne

10.1 Niech $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_1 = (1,1,0)$, $\alpha_1 = (1,0,0)$. Przekształcenie ϕ jest zadane przez macierz w bazie $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3}$:

$$M(\phi)_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Znależć obraz i jądro ϕ.

10.2 Wskazać przekształcenia $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\phi\psi \neq 0$, ale $\psi\phi = 0$.

10.3 Wskazać izomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniający dwa warunki:
- $\phi(0,2,1) \in \{x + y + z = 0, x - y + 2z = 0\}$,
- $\phi(1,2,2) \in \{x - y + 2z = 0\}$.

10.4 Wskazać przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające 3 warunki
1) $lin\{(-1,2,1)\} = ker\,\phi$,
2) $(1,1,2) \in im\,\phi$
3) $\phi^3 = 0$.

10.5 Wskazać przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające 3 warunki
1) $(-1,2,1) \in ker\,\phi$,
2) $lin\{(1,1,2)\} = im\,\phi$
3) $\phi^3 = 0$.

10.6 Wykazać, że przekształcenie ϕ spełniające powyższe warunki musi ponadto spełniać: $\phi^2 = 0$ oraz $\dim(ker(\phi)) = 2$.

10.7 Wkazać, że jeśli przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia $\phi^2 = -Id$, to w pewnej bazie ma macierz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10.8 Znaleźć wszystkie przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające $\phi^4 = Id$ oraz $\phi(1,2) = (1,1)$.

10.9 Znaleźć wszystkie przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające $\phi^3 = Id$ oraz $\phi(1,2) = (1,1)$.

10.10 Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia warunki: $\phi^3 = Id$, $\phi(v) = v$ dla pewnego $v \neq 0$. Udowodnić, że $\phi = Id$. Czy to samo jest prawdą, jeśli zastąpić $\mathbb{R}$ przez $\mathbb{C}$?

10.11 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $(Id - \phi)^2 = Id - \phi$.

10.12 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $\phi_{|im\,\phi} = Id_{|im\,\phi}$.

10.13 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $V = ker\,\phi \oplus im\,\phi$. Ponadto ϕ jest rzutowaniem na $im\,\phi$. Znaleźć wzór rzutowania na $ker\,\phi$.

10.14 Niech $S : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Załóżmy, że $S^2 = Id$. Zdefiniujmy

$$V_+ = \{v \in V : Sv = v\}\,, \qquad V_- = \{v \in V : Sv = -v\}\,.$$

Przyjmijmy $\phi = \frac{1}{2}(S + Id)$. Udowodnić, że ϕ jest rzutowaniem na podprzestrzeń V_+ wzdłuż V_-. Zdefiniować rzut na V_- za pomocą S.

11 Rząd macierzy. Tw. Kroneckera-Capellego

11.1 Znaleźć rzędy macierzy

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (2) b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$ (2).

11.2 W zależności od parametru znaleźć rząd macierzy

a) $\begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{pmatrix}$ $(p = 0, 2 \Rightarrow 2)$ b) $\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & 2 & p-1 \\ p+2 & 3 & p \end{pmatrix}$ (2)

c) $\begin{pmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{pmatrix}$ $(p = 0 \Rightarrow 2)$

11.3 Ocenić ile rozwiązań mają układy równań

a) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 3x + y + z - t = 2 \\ 5x - y + 5z + t = 4 \end{cases}$ (dim=2)

b) $\begin{cases} y + z + 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 2 \\ x - 2y + z + 2t = -1 \\ 2x + 3y + z + 3t = 1 \end{cases}$ $(\emptyset)$

11.4 Ocenić ile rozwiązań mają układy równań w zależności od parametru

a) $\begin{cases} (2p+1)x + (p-3)y = p+1 \\ (p+2)x - 2y = 2p \end{cases}$ $(-4 \Rightarrow \emptyset,\ 1 \Rightarrow dim = 1)$

b) $\begin{cases} x + py + z = 1 \\ 2x + y + z = p \\ x + y + pz = p^2 \end{cases}$ $(p = 1 \Rightarrow \emptyset,\ p = 2 \Rightarrow dim = 1)$

11.5 Dane są 4 punkty na płaszczyźnie (a_i, b_i) dla $i = 1, 2, 3, 4$. Jakie warunki muszą spełniać współrzędne aby przez te punkty przechodził okrąg.

11.6 To samo zadania dla 5 punktów w $\mathbb{R}^3$ i sfery?

11.7 Dany jest układ równań zadany przez macierz $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|\beta)$, gdzie α_i, β są kolumnami. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie rozwiązaniem. Znaleźć rozwiązanie układu zadanego przez macierz:

a) $(\alpha_1 + a\alpha_i, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|\beta)$ dla pewngo a i i,
b) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a\alpha_i, \ldots, \alpha_n|\beta)$ dla pewngo $a \neq 0$ i i,
c) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|a\beta)$ dla pewngo $a \neq 0$,
d) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|\beta + a\alpha_i)$ dla pewngo a i i.

11.8 Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym oraz niech $\dim W \leq \dim V$. Wykazać, że istnieje przekształcenie liniowe $g : W \to V$ takie, że $g \circ f = 0$ oraz

$$\dim Im(f) + \dim Im(g) = \dim W\,.$$

12 Endomorfizmy

Wyznaczniki, macierze odwrotne, diagonalizacja, postać Jordana

12.1 Znaleźć wyznaczniki macierzy - zadania z
a) Jurlewicz-Skoczylas [JuSk]: 3.9, 3.12, 3.14, str. 80-81;
b) Proskuriakow [Pro]: 279, 280,283, 284, 297, 312, 313, 318, 319, 321, 323, str. 35-41.

12.2 Wykazać, że $det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = det\, A \cdot det\, C$.

12.3 Tw. Kroneckera-Capellego: [JuSk], przykład 4.11 str. 91 i zad. 4.11 str. 108.

12.4 Zanając macierze A^{-1} i C^{-1} znaleźć macierz odwrotnaą do macierzy blokowej $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

12.5 Ciąg Fibonacciego: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Podać wzór na F_n.

12.6 Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem liniowych przestrzeni rzeczywistych. Wykazać, że jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartoćią własną, to $\overline{\lambda}$ też jest wartością własą i $\dim V_\lambda = \dim V_{\overline{\lambda}}$.

12.7 Zdiagonalizować macierz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$.

12.8 Wykazać, że macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ diagonalizuje się.

12.9 Skonstruować przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{C} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ takie, że
$$\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1) \cdot \phi(z_2).$$

12.10 Opisać wszystkie klasy sprzężoności rzeczywistych macierzy 2×2.

12.11 Czy macierze są podobne? Koźniewski [Koź] Zad 1, str 97.

12.12 Znaleźć bazę Jordana dla macierzy [Pro] 1530-1534, str. 200, [Koź] Zad 2, str 97.

12.13 Podnoszenie do wysokiej potęgi: [Koź] Zad. 4 (A_1 i A_3).

12.14 Wykazać, że jeśli $\phi : V \to V$ jest przekształceniem liniowym takim, że $\phi^n = id$ to ϕ jest diagonalizowalne.

12.15 Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem przestrzeni n-wymiarowej o wartościach własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Dla dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ oraz $j \in \mathbb{N}$ niech $a_{i,j} = rz((\phi - \lambda_i Id)^j)$. Niech $b_{i,j}$ oznacza ilość klatek wymiaru j z wartością własną λ_i występujących w postaci Jordana przekształcenia ϕ. Wyrazić $b_{i,j}$ za pomocą $a_{i,j}$.

12.16 Znaleźć bazę Jordana dla przekształcenia zadanego przez macierz

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13 Przestrzeń sprzężona

13.1 Niech $f(x, y, z) = 2x + y - 3z$ będzie funkcjonałem na $\mathbb{R}^3$. Zanaleźć współrzędne f
a) w bazie sprzężonej do standardowej,
b) w bazie sprzeżonej do $(3, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 7)$,
c) w bazie sprzeżonej do $(2, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 2)$.

13.2 Niech $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będą funkcjonałami zadanymi wzorami $f(x, y) = x + iy$, $g(x, y) = x - iy$. Wykazać, że $\{f, g\}$ stanowią bazę $(\mathbb{C}^2)^*$. Znaleźć taką bazę $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^2$, że $\{f, g\}$ jest bazą sprzężoną do $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

13.3 Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3} \subset \mathbb{K}^3$ by standardowy wektor sprężony ϵ_1^* był równy $\alpha_2^* - 5\alpha_3^*$.

13.4 Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozpiętą przez wektory $(1, 2, 0, -3)$, $(-2, 3, 2, -3)$ i $(-3, 1, 2, 0)$. Przez $Anh(V) = \left\{f \in (\mathbb{R}^4)^* : \forall v \in V \; f(v) = 0\right\}$ oznaczamy przestrzeń funkcjonałow znikających na V (tzw. *anihilator*). Opisać $Anh(V)$ równaniami. Podać jego bazę.

13.5 Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią opisaną przez równanie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Opisać $Anh(V)$ równaniami. Podać jego bazę.

13.6 Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym $f = 5\epsilon_1^* - 3\epsilon_2^* + \epsilon_3^*$ w bazie sprzężonej do bazy standardowej.
a) Napisać wzór na f.
b) Znaleźć współrzędne tego funkcjonału w bazie sprzężonej do $\alpha_1 = (2, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\alpha_1 = (0, 1, 1)$.

13.7 Niech V będzie przestrzenią wielomianów zespolonch stopnia nie większego od 3. Definiujemy funkcjonały $\Phi_i \in V^*$ dla $i = 0, 1, 2, 3$
$$\Phi_i(f) = f^{(i)}(1)$$
(i-ta pochodna). Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=0,\ldots,3} \subset V$, że Φ_i jest bazą sprzężoną, tzn $\alpha_i^* = \Phi_i$.

13.8 Niech $n \in \mathbb{N}$. Badamy funkcjonały liniowe z przestrzeni macierzy $\phi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Opisać wszystkie funkcjonały spełniające tożsamość $\phi(AB) = \phi(BA)$ dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

13.9 Podać przykład bazy $\mathbb{R}^3$ taki, że $\epsilon_1^* = 2\alpha_1^* + \alpha_3^*$ oraz $\epsilon_2^* = \alpha_1^* + \alpha_2^*$.

13.10 Niech $\Phi; \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ będzie dane wzorem
$$\Phi(x, y, z) = (x + 2y, x + 3y + 2z, y + 2z, x + y - 2z) .$$
Znaleźć obraz i jądro przekształcenia sprężonego $\Phi^*; (\mathbb{C}^4)^* \to (\mathbb{C}^3)^*$ (przypomnienie: $\Phi^*(f) = f \circ \Phi$ dla $f \in (\mathbb{C}^4)^*$).

13.11 To samo dla $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x, y) = (x + 2y, 3x + 6y, 2x + 4y)$.

13.12 Wykazać, że funkcjonały mają takie same jądra wtedy i tylko wtedy gdy są proporcjonalne.

13.13 Niech $\dim V = n$ oraz niech $f_1, f_2, \ldots f_n \in V^*$. Wykazać że $f_1, f_2, \ldots f_n$ są liniowo niezależne wtedi i tylko wtedy gdy $\bigcap_{i=1}^n ker(f_i) = \{0\}$.

13.14 Niech $L \subset V$, $\Phi : V \to W$. Wykazać, że
$$L \subset ker\,\Phi \Longleftrightarrow im\,\Phi^* \subset Anh(L) .$$

Drugą część zadań jest pod adresem:

http://duch.mimuw.edu.pl/%7Eaweber/zadania/gal2013w/gal2all.pdf