Funkcje Schura $S_\lambda = S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ są zdefiniowane w zadaniu 5, seria 10.
http://www.mimuw.edu.pl/~alan/GAL1/GAL10.pdf

1. Wykazać, że funkcja $S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest wielomianem zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$. Ponadto dla dowolnej permutacji σ:

$$S_\lambda(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Mówimy, że funkcja $S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest symetryczną funkcją zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Sprawdziliśmy, że jeśli $\lambda = (1, 1, 1, .., 1, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ (k-jedynek) to S_λ jest elementarną funkcją symetryczną

$$e_k = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}.$$

Przedstawić $h_k := S_{k,0,0,\ldots,0}$ jako sumę jednomianów.

3. Mamy

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) = \sum_{k=0}^{n} e_k.$$

Wykazać

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k.$$

4. Przyjmujemy konwencję $h_i = 0$ dla $i < 0$. Udowodnić:

$$S_\lambda = det \begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & h_{\lambda_1+2} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & h_{\lambda_2+1} & \cdots & h_{\lambda_2+n-2} \\ h_{\lambda_3-2} & h_{\lambda_3-1} & h_{\lambda_3} & \cdots & h_{\lambda_2+n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ h_{\lambda_n-n+1} & h_{\lambda_n-n+2} & h_{\lambda_n-n+3} & \cdots & h_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

5. Wykazać, że funkcje Schura stanowią bazę przestrzeni wielomianów symetrycznych zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

6. Wykazać że dla $k < n$ mamy

$$S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = 0$$

jesli $\lambda_{k+1} > 0$, oraz

$$S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

w przeciwnym przypadku.

7T. Wyrazić $S_\lambda(x_1 + y, x_2 + y, \ldots, x_n + y)$ za pomocą y i $S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

8TTT. Wyrazić $S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ za pomocą wielomianów $S_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ i $S_\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.