12.16 Znaleźć bazę Jordana dla przekształcenia zadanego przez macierz

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

3.3.18. Rozwiązać równania:

a) $X^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$; b) $X^2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

3.3.19. Korzystając z postaci Jordana macierzy, obliczyć:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{50}$; b) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}^{64}$.

Zad.

Znaleźć uogólnienie tw Jordana dla ciała nie koniecznie algebraicznie domkniętego (np. dla ciała liczb rzeczywistych).
Postarać się znaleźć postać kanoniczną.

Zad.

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem k. Załóżmy, że char k=0 lub char k < dim V. Dany operator A działający na V. Pokazać, że jeśli $tr(A^k)=0$ dla k=1,2,...dim V, to A jest nilpotentny.