Do domu na 17.03:

Wykazać, że elipsy, hiperbole i parabole na płaszczyźnie są rzutowo równoważne.

Z kostrykina:

zad 6.5.19-20

zad 6.5.22

zad 6.5.25

6.5.9. Udowodnić, że dla każdego skończonego zbioru punktów w przestrze rzutowej nad ciałem nieskończonym istnieje zawierająca go mapa afiniczna.

6.5.10. Wykazać, że dowolną $(k-1)$-wymiarową podprzestrzeń w $\mathbf{P}^n$ można pokryć k mapami afinicznymi, a nie można jej pokryć mniejszą liczbą takich map.

6.5.11. Wyznaczyć liczbę punktów n-wymiarowej przestrzeni rzutowej nad ciałem q-elementowym.

6.5.12. Wyznaczyć liczbę k-wymiarowych podprzestrzeni w n-wymiarowej przestrzeni rzutowej nad ciałem q-elementowym.

6.5.13. Podać liczbę przekształceń rzutowych n-wymiarowej przestrzeni rzutowej nad ciałem q-elementowym.

6.5.14. Niech M_1 i M_2 będą nie przecinającymi się płaszczyznami w $\mathbf{P}^n$, a L_1, L_2 nie przecinającymi się płaszczyznami o tych samych wymiarach. Wykazać, że istnieje przekształcenie rzutowe przeprowadzające M_1 w L_1 i M_2 w L_2.

6.5.15. Wykazać, że jeśli przekształcenie rzutowe przeprowadza pewną mapę afiniczną w siebie, to indukuje na niej przekształcenie afiniczne.

6.5.16. Udowodnić, że każde bijektywne przekształcenie dwuwymiarowej płaszczyzny rzutowej, przeprowadzające proste na proste i zachowujące dwustosunek punktów na każdej prostej, jest przekształceniem rzutowym.

6.5.17. Udowodnić, że za pomocą odpowiedniego przekształcenia rzutowego można przeprowadzić dowolne cztery proste, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie, na dowolne inne cztery proste mające tę własność.

6.5.18. Wykazać, że istnieje przekształcenie rzutowe płaszczyzny zachowujące dany trójkąt i przeprowadzające dany punkt wewnętrzny tego trójkąta na dowolny inny punkt wewnętrzny.

6.5.19. Wykazać, że istnieje przekształcenie rzutowe płaszczyzny, zachowujące okrąg $x^2+y^2=1$ i przeprowadzające dany punkt wewnętrzny tego okręgu na dowolny inny punkt wewnętrzny.

6.5.20. Udowodnić, że korzystając jedynie z linijki nie można wyznaczyć środka danego okręgu.

6.5.21. Dowieść, korzystając z przekształceń rzutowych, że odcinki łączące wierzchołki trójkąta z wybranymi punktami przeciwległych boków przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy te punkty są punktami styczności pewnej elipsy wpisanej w trójkąt.

6.5.22. Rozważyć obraz przedstawiający aleję. Odległość od pierwszego drzewa alei do linii horyzontu jest równa l, odległość między drzewami k i $k+1$ jest równa a_k. Wyrazić:

a) a_3 za pomocą a_1 i a_2; b) a_2 za pomocą l i a_1.

6.5.23. Przekształcenie rzutowe płaszczyzny nazywa się *homologią*, jeśli zachowuje wszystkie punkty leżące na jednej prostej (*osi homologii*) i wszystkie proste przechodzące przez pewien punkt (*środek homologii*). Wykazać, że:

a) istnieje tylko jedna homologia o zadanej osi l i zadanym środku O, prze prowadzająca wybrany punkt $A \neq O$, $A \notin l$, w dany punkt $A' \neq O$, $A' \notin$, należący do prostej OA;

b) każde przekształcenie rzutowe płaszczyzny jest iloczynem dwóch homologii

6.5.24. Wykazać, że istnieje tylko jedno przekształcenie rzutowe płaszczyzny zachowujące okrąg $x^2+y^2=1$ i przeprowadzające wybrane trzy punkty na tym okręgu na trzy wybrane punkty należące do tego okręgu.

6.5.25. *Twierdzenie Desargues'a.* Udowodnić, że jeśli proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie, to punkty przecięcia prostych AB z $A'B'$, BC z $B'C'$, AC z $A'B'$ leżą na jednej prostej.

6.5.26. *Twierdzenie Pascala.* Wykazać, że punkty przecięcia przeciwległych boków sześciokąta wpisanego w okrąg leżą na jednej prostej.

6.5.27. *Twierdzenie Pappusa.* Wykazać, że punkty przecięcia przeciwległych boków sześciokąta, którego wierzchołki są kolejno umieszczone na dwóch prostych, leżą na jednej prostej.

6.5.28. Niech a_1, a_2, a_3, a_4 będą prostymi na płaszczyźnie przechodzącymi przez punkt O, a l prostą nie przechodzącą przez punkt O. Wykazać, że dwustosunek punktów przecięcia prostych a_1, a_2, a_3, a_4 z prostą l nie zależy od wyboru l (nazywa się go *dwustosunkiem prostych* a_1, a_2, a_3, a_4).

6.5.29. Niech f będzie niezdegenerowaną formą dwuliniową na $(n+1)$-wymiarowej przestrzeni wektorowej V. Każdej $(k+1)$-wymiarowej podprzestrzeni $U \subset V$ przyporządkujemy $(n-k)$-wymiarową podprzestrzeń

$$U^{\perp} = \{y \in v \mid f(x, y) = 0 \text{ dla każdego } x \in U\}.$$

W ten sposób w przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}(V)$ zostało określone odwzorowanie K_f, które każdej k-wymiarowej płaszczyźnie przyporządkowuje $(n-k-1)$-wymiarową płaszczyznę (*korelacja* względem formy f). Wykazać, że:

a) korelacja zachowuje relację incydencji, tzn.

$$U_1 \subset U_2 \Leftrightarrow K_f(U_1) \subset K_f(U_2);$$

b) jeśli forma f jest symetryczna lub antysymetryczna, to korelacja K_f jest inwolutywna, tzn.

$$K_f(K_f(U)) = U;$$

c) złożenie korelacji z przekształceniem rzutowym jest korelacją;

d) każda korelacja jest złożeniem ustalonej korelacji z pewnym przekształceniem rzutowym.

6.5.30. Udowodnić, że każda korelacja prostej rzutowej działa na jej punkty w taki sam sposób, jak pewne przekształcenie rzutowe.

6.5.31. Wykazać, że korelacja prost...