Liczby Bernouliego są dane wzorem:

$$B_n = (-1)^{n+1}(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

lub

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

$$b_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!}$$

Wykazać, że

$$B_n = \frac{1}{2}(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{5}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2n-1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-5)!} & \dots & \frac{1}{3!} \end{vmatrix},$$

oraz

$$B_n = 2^n (2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}.$$

Wskazówka:

603. Указание. Используя равенства $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_{2n-1} = 0$ при $n > 1$, полученные в предыдущей задаче, положить $b_{2n} = c_n$ и в тождестве

$$1 = \left(1 - \frac{1}{2}x + c_1x^2 + c_2x^4 + c_3x^6 + \ldots\right)\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots\right)$$

приравнять коэффициенты отдельно при четных и при нечетных степенях x.