Kolejne Zadania

0. Niech A będzie liniowym operatorem. Wykazać, że $A^T A$ jest ma wartości własne rzeczywiste nieujemne. Wywnioskować (nie rozwiązując równań różniczkowych), że warości własne Laplasjanu $\Delta : C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1)$ są niedodatnie.

1. **Przede wszystkim:**
Zadania z Kostykina: Część 2, (na początek dla wprawy 6.3.23-4) **6.3.25, 6.3.26**, str, 151-2.

Jeśli starczy czasu:

2. Zadania o expie$: M(n \times n) \to GL_n$. Wykazać:

a) Jesli $[A, B] = 0$, to $e^A e^B = e^{A+B}$

b) $det(e^A) = e^{tr\,A}$

c) Niech $Log(I + A) = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + \ldots$. Sprawdzić, że

$$Log(e^{tA}e^{tB}) = t(A + B) + \frac{1}{2}t^2[A, B] + \frac{1}{12}t^3(\pm[A, [A, B]] \pm [B, [B, A]]) + t^4\,????$$

Ustalić znaki i wyrazić wyrazy przy t^4 za pomocą komutatorów.
(Wzory Bakera-Campbella-Hausdorffa.)

d) sprawdzić, że
exp: Macierze symetryczne $\to$ symetryczne, dodatnio określone
exp: Macierze antsymetryczne $\to$ ortogonalne
jest przekształceniem „na".

e) Niech $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ oznacza zbiór macierzy o śladzie 0. Czy $exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to SL_2(\mathbb{R})$ jest epimorfizmem?

4. Ile składowych ma grupa $O(m, n)$?

b) Wyznaczyć odległość $\rho(P_1, P_2)$.

c) Skonstruować bijektywną odpowiedniość między $L_1 \cap L_2$ i zbiorem wszystkich prostych prostopadłych do P_1 i P_2 i przecinających obie te płaszczyzny.

d) Wykazać, że wszystkie proste opisane w punkcie c) są równoległe między sobą i że ich teoriomnogościową sumą jest płaszczyzna o wymiarze $\dim(L_1 \cap L_2) + 1$.

6.3.14. Wyznaczyć odległość między płaszczyznami P_1 i P_2 w przestrzeni euklidesowej, jeśli:

a) $P_1 : x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3,$
$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6,$
$P_2 = (0, 2, 6, -5) + \langle(-7, 1, 1, 1), (-10, 1, 2, 3)\rangle;$

b) $P_1 : -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3,$
$-3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4,$
$P_2 = (1, 3, -3, -1) + \langle(1, 0, 1, 0)\rangle;$

c) $P_1 : x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 2,$
$x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 3,$
$P_2 = (1, -2, 5, 8, 2) + \langle(0, 1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, -1, 1)\rangle;$

d) $P_1 : x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6,$
$x_1 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 0,$
$P_2 = (-4, 3, -3, 2, 4) + \langle(2, 0, 1, 1, 1), (-5, 1, 0, 1, 1)\rangle.$

6.3.15. Niech punkty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ przestrzeni euklidesowej będą położone w jednakowej odległości d jeden od drugiego. Wyznaczyć odległość między płaszczyznami $\langle a_0, a_1, \ldots, a_k\rangle$ i $\langle a_{k+1}, \ldots, a_n\rangle$.

6.3.16. Udowodnić, że konfiguracje złożone z dwóch płaszczyzn $\{a_1 + L_1, a_2 + L_2\}$ oraz $\{a_1' + L_1', a_2' + L_2'\}$ w przestrzeni euklidesowej są metrycznie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho(a_1 + L_1, a_2 + L_2) = \rho(a_1' + L_1', a_2' + L_2')$ oraz konfiguracje podprzestrzeni $\{L_1, L_2\}$ i $\{L_1', L_2'\}$ są ortogonalnie równoważne w odpowiadającej wektorowej przestrzeni euklidesowej.

6.3.17. Sprawdzić, czy podane pary płaszczyzn w przestrzeni euklidesowej są metrycznie równoważne:

a) $P_1 = (0, 9, 8, -12, 11) + \langle(0, 2, 2, 2, 1), (3, 1, 1, 1, -1)\rangle,$
$P_2 = (-3, -4, -5, 11, -12) + \langle(7, 5, -5, -1, -5), (3, 5, -1, 11, 13)\rangle;$

b) $Q_1 = (2, -5, -11, -8, -10) + \langle(2, -1, 1, -1, 1), (2, -2, 1, 0, 1)\rangle,$
$Q_2 = (8, 8, 10, 9, 11) + \langle(0, 3, 4, -4, -3), (14, -2, -5, 3, 4)\rangle;$

c) $R_1 = (7, -3, -9, -14, 5) + \langle(0, 0, 0, 1, 2), (2, -1, 2, 0, -6)\rangle,$
$R_2 = (0, 10, 9, 14, -5) + \langle(1, 7, 2, 0, 6), (4, -1, 0, 2, -2)\rangle.$

6.3.18. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów w przestrzeni euklidesowej, przez które można przeprowadzić prostą przecinającą płaszczyzny P_1 oraz P_2 i prostopadłą do tych płaszczyzn:

a) $P_1 = (1, 2, -1, -9, -13) + \langle(2, 3, 7, 10, 13), (3, 5, 11, 16, 21)\rangle;$
$P_2 : 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = -22,$
$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 = -4,$
$9x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -138;$

b) $P_1 = (3, 7, 2, 4, -3)) + \langle(2, 5, 4, 5, 3), (4, 5, 6, 3, 3)\rangle;$
$P_2 : -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -14,$
$6x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 16,$
$2x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 26.$

6.3.19. Wykazać, że:

a) jeśli dla ruchu przestrzeni euklidesowej istnieją dwie skośne płaszczyzn niezmiennicze, to ma on punkt stały;

b) ruch f n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, mający punkt stały, m dwie skośne płaszczyzny niezmiennicze dodatniego wymiaru w dwóch przy padkach: jeśli ruch f jest właściwy i $n \geqslant 5$ jest nieparzyste lub ruch f jes niewłaściwy, $n \geqslant 4$ i jest parzyste.

6.3.20. Niech $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$ i $(b_0, b_1, \ldots, b_s)$ będą dwoma układami punktó w przestrzeni euklidesowej. Wykazać, że ruch przeprowadzający punkty a_i n b_i istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\rho(a_i, a_j) = \rho(b_i, b_j), \qquad i, j = 1, \ldots, s.$$

6.3.21. Wykazać, że dla każdego ruchu f przestrzeni euklidesowej zbiór punktó a, na których jest osiągane minimum odległości $\rho(a, f(a))$, jest płaszczyzn niezmienniczą względem f i że obcięcie f do tej płaszczyzny jest przesunięcie równoległym.

6.3.22. Wykazać, że jeśli odpowiadające sobie kąty dwuścienne dwóch czworości nów w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej są równe, to te czworościar są podobne.

6.3.23. Opisać geometrycznie ruch właściwy f płaszczyzny euklidesowej, jeśli:

a) $Df = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ f(O) = (-2, 4);$

b) $Df = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ f(O) = (1, 1).$

6.3.24. Podać opis geometryczny ruchu niewłaściwego f płaszczyzny euklides wej, jeśli:

a) $Df = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ f(O) = (1, 0),$

b) $Df = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}, \ f(O) = (1, -\sqrt{3}).$

6.3.25. Podać opis geometryczny ruchu właściwego f trójwymiarowej przestrze euklidesowej, jeśli:

a) $Df = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $f(O) = (1, 0, -1)$;

b) $Df = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$, $f(O) = (-1, -7, 2)$;

c) $Df = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, $f(O) = (-2, 4, 1)$.

6.3.26. Podać opis geometryczny ruchu niewłaściwego f trójwymiarowej prz strzeni euklidesowej, jeśli:

a) $Df = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$, $f(O) = (1, 1, -2)$;

b) $Df = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $f(O) = (4, 0, 2)$;

c) $Df = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $f(O) = (2, 0, 0)$;

d) $Df = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $f(O) = (-3, 1, 2)$.

6.4. Hiperpowierzchnie drugiego stopnia

Oznaczenia i pojęcia wykorzystywane w zadaniach tego paragrafu są zawar w części drugiej dodatku „Podstawowe pojęcia teoretyczne".

6.4.1. Wykazać, że dla dowolnych x, $y \in V$ jest spełniona równość

$$Q(a_0 + x + y) = q(y) + 2f(x, y) + l(y) + Q(a_0 + x).$$

6.4.2. Wykazać, że jeśli $b = a_0 + v$, $v \in V$, jest punktem środkowym funk kwadratowej Q, to $Q(b + v) = Q(b - v)$ dla dowolnego $v \in V$ i że funk liniowa $y \mapsto 2f(v, y) + l(y)$ jest tożsamościowo równa zeru.

6.4.3. Wykazać, że zbiór punktów środkowych (*środek*) funkcji kwadratowej jest wyznaczony za pomocą układu równań $\partial Q/\partial x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

6.4.4. Udowodnić, że przy zamianie układu współrzędnych afinicznych $(a_0; e_1, \ldots, e_n)$ na układ $(a_0'; e_1', \ldots, e_n')$, zgodnie ze wzorem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix},$$

macierze form kwadratowych Q i q w nowym układzie współrzędnych są związane z macierzami w starym układzie wzorami

$$\tilde{A}_Q' = \tilde{T}^t \tilde{A}_Q \tilde{T}, \qquad A_q = T^t A_q T,$$

gdzie

$$\tilde{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & t_1 \\ & T & & \vdots \\ & & & t_n \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

jest macierzą afinicznej zamiany współrzędnych.

6.4.5. Wykazać, że punkty przecięcia prostej afinicznej $x_k = x_k^0 + r_k t$, $k = 1, \ldots, n$, z kwadryką $Q(x_1, \ldots, x_n) = 0$ są wyznaczone rozwiązaniami równania

$$At^2 + 2Bt + C = 0,$$

gdzie

$$A = q(r) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} r_i r_j, \qquad C = Q(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) r_i = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} x_j^0 + b_i) r_i.$$

6.4.6. Wyznaczyć środek funkcji kwadratowej nad ciałem $\mathbf{R}$, danej w pewnym układzie współrzędnych afinicznych wzorem:

a) $2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i + 1$; **b)** $x_1^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j < n} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i + 1$;

c) $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_1 + x_n + 1$; **d)** $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j + x_1$.

6.4.7. Dwie funkcje kwadratowe $Q_i \colon A \to K$, $i = 1, 2$, nazywa się *równoważnymi*, jeśli istnieje takie przekształcenie afiniczne $f \colon A \to A$, że $Q_2(x) = \lambda Q_1(f(x))$ dla pewnego $\lambda \in K^*$ i wszystkich $x \in A$. Wyznaczyć liczbę klas równoważności funkcji kwadratowych nad ciałem $\mathbf{Z}_3$, jeśli:

a) wymiar A wynosi 2; **b)** wymiar A wynosi 3.

6.3.14. **a)** $22/3$; **b)** $\frac{5}{2}$; **c)** 7; **d)** 6.

6.3.15. $d\sqrt{(n+1)/(2(k+1)(n-k))}$.

6.3.17. Pary $\{P_1, P_2\}$ i $\{Q_1, Q_2\}$ są metrycznie równoważne, ale nie są równoważne z parą $\{R_1, R_2\}$. Wszystkie odległości są równe 36; cosinusy kątów dla pierwszych dwóch par są równe $-3/5$ i $4/5$, a dla trzeciej $-1/\sqrt{5}$ i $2/\sqrt{5}$.

6.3.18. **a)** $(2, -3, -4, 1, 0) + \langle(18, 0, -13, -1, 5)\rangle$; **b)** $(5, 2, 2, -5, -6) + \langle(0, 3, -2, -2, 1), (1, 0, 1, -1, 0)\rangle$. Zastosować zadanie 6.3.13 d).

6.3.20. Wykorzystać zadanie 4.4.4

6.3.22. Wykazać, że istnieje operator ortogonalny, który przeprowadza jednostkowe wektory, ortogonalne do ścian pierwszego czworościanu, na jednostkowe wektory, ortogonalne do ścian drugiego czworościanu.

6.3.23. **a)** Obrót o kąt $-\pi/2$ wokół punktu $(1, 3)$; **b)** obrót o kąt $\pi/4$ wokół punktu $(-1/\sqrt{2}, 1 + 1/\sqrt{2})$.

6.3.24. **a)** Złożenie odbicia w prostej o wektorze kierunkowym $a = (1, 1)$, przechodzącej przez punkt $(1/2, 0)$, z przesunięciem równoległym o wektor $\frac{1}{2}a$; **b)** odbicie w prostej o wektorze kierunkowym $(\sqrt{3}, 1)$, przechodzącej przez punkt $(2, 0)$.

6.3.25. **a)** Obrót o kąt $\pi/3$ wokół osi o wektorze kierunkowym $(1, 1, 1)$ i przechodzącej przez punkt $(1, 2, 0)$; złożenie obrotu o kąt $\pi/2$ wokół osi o wektorze kierunkowym $a = (2, -2, 1)$ i przechodzącej przez punkt $(2, -1, 2)$ z przesunięciem równoległym o wektor $2a$; **c)** złożenie obrotu o kąt $\pi - \arcsin\frac{5}{14}$ wokół osi o wektorze kierunkowym $(1, 1, 1)$ i przechodzącej przez punkt $(-1, 2, 1)$ z przesunięciem równoległym o wektor a.

6.3.26. **a)** Złożenie obrotu o kąt $\pi/2$ wokół osi o wektorze kierunkowym $(2, 2, -1)$ i przechodzącej przez punkt $P = (0, 1, -1)$ z odbiciem w płaszczyźnie ortogonalnej przechodzącej przez punkt P; **b)** złożenie odbicia w płaszczyźnie $x - 2y + z = 3$ z przesunięciem równoległym o wektor $(3, 2, 1)$; **c)** złożenie obrotu o kąt $\arccos\frac{1}{3}$ wokół osi o wektorze kierunkowym $(1, 0, -1)$ i przechodzącej przez punkt $P = (1, -1, 0)$ z odbiciem w płaszczyźnie ortogonalnej przechodzącej przez punkt P; **d)** odbicie w płaszczyźnie $3x - y - 2z + 7 = 0$.

6.4.2. Przenieść początek układu współrzędnych do punktu b, wykorzystując wzór z zadania 6.4.1.

6.4.3. Wykorzystać zadanie 6.4.2

6.4.4. Zauważyć, że jeśli wprowadzić rozszerzoną kolumnę współrzędnych $\widetilde{X} = (x_1, \ldots, x_n, 1)$, to $Q(a_0 + x) = \widetilde{X}^t A_Q \widetilde{X}$ i $\widetilde{X} = \widetilde{T}\widetilde{X}'$.

6.4.5. Skorzystać z rozkładu Taylora wielomianu $Q(x_1, \ldots, x_n)$ wokół punktu $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = Q(x_1^0, \ldots, x_n^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)(x_i - x_i^0)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0).$$

6.4.6. **a)** Punkt $(-1/(n-1), \ldots, -1/(n-1))$; **b)** hiperpłaszczyzna $x_1 + \cdots + x_n + 1 = 0$; **c)** jeśli n jest parzyste, to środkiem jest punkt $(x_1^0, \ldots, n_n^0)$, gdzie

$$x_i^0 = \begin{cases} (-1)^{i/2} & \text{dla parzystego } i, \\ (-1)^{(n+1-i)/2} & \text{dla nieparzystego } i; \end{cases}$$

jeśli $n = 4k+3$, to środkiem jest prosta $(0, -1, 0, 1, \ldots, -1, 0) + t(1, 0, -1, 0, \ldots, 0, -1)$; jeśli $n = 4k+1$, to środek jest pusty; **d)** środek jest pusty.

6.4.7. **a)** 9; **b)** 17.

6.4.8. **a)** $3n - 1$; **b)** $n^2 + 3n - 1$.

6.4.9. Wykorzystać wynik zadania 6.4.5.

6.4.10. Skorzystać z zadań 6.4.5 i 6.4.1.

6.4.11. **a)** $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$; **b)** $x_1 + 2\sum\limits_{i=2}^{n-1} x_i + x_n + 2 = 0$.

6.4.12. Zastosować zadania 6.4.3 i 6.4.10.

6.4.13. Posłużyć się zadaniem 6.4.3.

6.4.14. Wykorzystać wynik zadania 6.4.13.

6.4.15. **a)** $(1, 2, 3)$ i $(2, -1, -4)$; **b)** cała prosta jest zawarta w kwadryce; **c)** prosta jest styczna do kwadryki w punkcie $(-3, 0, 0)$.

6.4.16. $(x_1 + \sqrt{12})/2 = x_2 = -x_3$ i $(x_1 - \sqrt{12})/2 = x_2 = -x_3$. Szukaną prostą można przedstawić równaniami $(x - a)/2 = y - b = -z$ lub $x = a - 2z$, $y = b - z$. Podstawiając te wyrażenia dla x i y do równania kwadryki, otrzyma się tożsamość. Z warunku orzekającego, że wszystkie współczynniki otrzymanej tożsamości mają być równe zeru, można określić niewiadome parametry a i b.

6.4.17. Dwie proste zespolone, przechodzące jedna na drugą przy sprzężeniu zespolonym: $t\left(1, i\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}\right)$ i $t\left(1, -i\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}\right)$.

6.4.18. **a)** $x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3 = 1$; **b)** $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_2x_3 - 2x_1x_3 + 20x_2 + 12x_3 + 12 = 0$.

6.4.19. **a)** $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i y_{i+1} + 3y_1 + 4\sum\limits_{i=2}^{n-1} y_i + 3y_n + 3n = 0$;

b) $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} y_i y_j + (n+1)y_1 + (n+2)\sum\limits_{i=2}^{n} y_i + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1 = 0$;

c) $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 + 4\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} y_i y_j + 4(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} y_i + 2y_n + 2n^2 = 0$.

6.4.20. **a)** Elipsa; **b)** hiperbola; **c)** para przecinających się prostych; **d)** zbiór pusty.

6.4.21. **a)** Afiniczny typ kwadryki jest określony równaniem $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 2y_{n+1} = 0$, a typ metryczny równaniem $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + (n+1)y_n^2 + 2y_{n+1} = 0$; **b)** afiniczny typ kwadryki jest określony równaniem $y_1^2 - y_2^2 - y_3^3 - \cdots - y_n^2 = -1$, a typ metryczny równaniem $(n-1)y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \cdots - y_n^2 = 1$.