Kolejne Zadania

0. Niech e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ będzie standardową bazą $\mathbb{R}^n$. Sprawdzić, że $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ wraz z $\alpha_n = e_{n-1} + e_n$ jest bazą $\mathbb{R}^n$. Upewnić się, że macierz standardowego iloczynu skalarnego w bazie $\{\alpha_i\}$ jest macierzą stowarzyszoną z jednym z grafów rozważanych w pracy domowej na 25.III.

1. Wykazać, że

$$O(n) \times T_+ \to GL_n(\mathbb{R})$$
$$(A, B) \mapsto AB$$

jest bijekcją. ($O(n)$ to macierze ortogonalne, a T_+ macierze górnotrójkątne z wyrazami dodatnimi na przekątnej.)

Udowodnić analogiczny fakt dla macierzy zespolonych.

2. Czy

$$T_+ \to \{iloczyny\ skalarne\}$$
$$A \mapsto A^T A$$

jest bijekcją?

3a. Niech

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Udowodnić

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \mathbf{i}\,\mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\,\mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\,\mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

3b. Niech

$$\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}.$$

Udowodnić, że w $\mathbb{H}$ każdy element różny od zera jest odwracalny. Na ile sposobów można zanurzyć ciało $\mathbb{C}$ w $\mathbb{H}$?

3c. Przekonać się, że na $\mathbb{H}$ forma 2-liniowa $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}Tr(x\bar{y}^T)$ przyjmuje wartości rzeczywiste i jest iloczynem skalarnym. Sprawdzić, że $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jest bazą ortonormalną. Niech S^3 będzie sferą jednostkową. Udowodnić $S^3 = SU(2)$.

3d. Niech

$$im\,\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}.$$

Grupa $SU(2)$ działa na $im\,\mathbb{H}$:

$$x \mapsto qxq^{-1}$$

dla $x \in im\,\mathbb{H}$, $q \in SU(2)$ (sprarawdzić, że wynik działania należy do $im\,\mathbb{H}$). Wykazać, że to działanie zachowuje iloczyn skalarny w $im\,\mathbb{H}$. Wykazać że otrzymujemy przekształcenie $SU(2) \to SO(3)$ takie, że przeciwobraz każdego elementu jest dwulelementowy.

4. Zadania 18.7-18.9 z http://duch.mimuw.edu.pl/∼aweber/zadania/gal/gaza.pdf