

Zadania do zrobienia na 1 kwietnia

0. Zadanie o diagramach z poprzedniej kartki.

1. Niech $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ będą macierzami symetrycznymi (nad \mathbb{R}), przy czym $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. Udowodnić, że jeśli A i B są dodatnio określone, to C jest dodatnio określona.

2. Niech A i B będą rzeczywistymi macierzami symetrycznymi i dodatnio określonymi. Wartości własne A należą do odcinka $[a, b]$, a wartości własne B należą do odcinka $[c, d]$. Wykazać, że wartości własne $A + B$ należą do odcinka $[a + c, b + d]$.

4. Wykazać, że każdą niezdegenerowaną macierz można przedstawić jako iloczyn AB macierzy symetrycznej, dodatnio określonej A i ortogonalnej B (tzn. $B B^T = I$).

Wsk. Wykazać że dla każdej macierzy symetrycznej i dodatnio określonej P istnieje (wyznaczona jednoznacznie) macierz symetryczna i dodatnio określona Q , taka że $Q^2 = P$.

3. Niech A będzie macierzą symetryczną i dodatnio określoną, a B ortogonalną (tzn. $B B^T = I$). Wykazać, że

(i) jeśli AB i BA są symetryczne i dodatnio określone, to $B = I$.

(ii) jeśli AB i BA są ortogonalne, to $A = I$.

I jeszcze będziemy robić zadania rachunkowe tak jak np. 18.7 z

<http://duch.mimuw.edu.pl/~aweber/zadania/gal/gaza.pdf>