Zadania Pisemne do zrobienia na 18.III

1. Niech $0 < m < n$ będą liczbami naturalnymi. Definiujemy $W(q) = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{q^n-q^i}{q^m-q^i}$. Wykazać, że $W(q)$ jest wielomianem, $W(q) = \sum_{i=0}^{m(n-m)} a_i q^i$, gdzie a_i jest równe ilości takich ciągów liczb naturalnych $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m \leq n$, że $\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j - j) = i$. (W szczególności $a_i > 0$.)

Wskazówka:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Niech $A = \mathbb{K}^n$ będzie przestrzenią afiniczną, a B podprzestrzenią afiniczną opisaną układem równań afinicznych $\{f_i(x) = 0\}_{i\in I}$. Wykazać, że jeśli H jest hiperpowierzchnią afiniczną (tzn. $\dim A - \dim H = 1$) zawierającą B, to H można opisać równaniem $\sum_{i\in I} a_i f_i(x) = 0$ dla pewnego wyboru $a_i \in \mathbb{K}$.

3. Niech $K, L, M \subset \mathbb{K}^3$ będzie trójką prostych parami skośnych. Czy każdą taką trójkę można przekształcić na dowolną inną za pomocą izomorfizmu afinicznego? Jeśli nie, to opisać orbity działania grupy izomorfizmów afinicznych na zbiorze takich trójek.

4. Wyznaczyć wszystkie punkty stałe oraz proste i płaszczyzny zachowywane przez przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zdefinowane na bazie punktowej:

$f(3, 2, 3) = (2, 4, 6)$

$f(4, 2, 3) = (1, 8, 12)$

$f(3, 3, 3) = (-1, -5, -1)$

$f(3, 2, 4) = (6, 12, 11)$.

(Zbiór X jest zachowywany przez f gdy $f(X) \subset X$.)