Ostatnie Zadania

1. Niech $\mathcal{D}$ będzie algebrą operatorów różniczkowych, czyli algebrą rozpiętą przez symbole $q_1, q_2, \dots q_n$ i $p_1, p_2, \dots p_n$, które są ze sobą przemnienne oprócz pary p_i i q_i

$$[p_i, q_i] = 1\,.$$

Mamy filtrację stopniem operatora

$$F_i\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D}\ : \text{w przedstawieniu } P \text{ iloczyny } p_i \text{ są długości} \leq i\ \}$$

i obiekt ,,zgradowany"

$$Gr_i\mathcal{D} = F_i\mathcal{D}/F_{i-1}\mathcal{D}\,, \quad Gr_\bullet\mathcal{D} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Gr_i\mathcal{D}\,.$$

Sprawdziliśmy, że

$$Gr_\bullet\mathcal{D} \simeq S^\bullet(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) \simeq S^\bullet(\mathbb{R}^{2n})\,.$$

Wykazać, że komutator $[P, Q]$ zadaje pewną operację (oznaczaną $\{P, Q\}$) w $Gr_\bullet\mathcal{D}$. Utożsamiając $S^\bullet(\mathbb{R}^{2n})$ z funkcjami wielomianowymi wyrazić $\{P, Q\}$ za pomocą mnożenia i różniczkowania po p_i i q_i.

Link: http://pl.wikipedia.org/wiki/Nawias_Poissona

2. Wiadomo, że algebra tensorowa

$$T_0V = \bigoplus_{i\geq 0} V^{\otimes i}$$

ma własność uniwersalną

$$\mathrm{Hom}_{\text{prestrzenie wektorowe}}(V, A) = \mathrm{Hom}_{\text{algebry}}(T_0(V), A)\,.$$

Znaleźć własność uniwersalną charakteryzującą $S^\bullet V$.

3. Znaleźć własność charakteryzującą algebrę zewnętrzną $\Lambda^\bullet V$. (Wsk: rozpatrzeć superalgebry przemienne, tzn. algebry $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{F}_2} A_i$ w których zachodzi $a\cdot b = (-1)^{ij} b\cdot a$ jeśli $a \in A_i$, $b \in A_j$.)

4. Rozważmy DSCA – przemienne superalgebry z różniczką, tzn. superalgebry wyposażone w przekształcenie liniowe $d : A \to A$ spełniające $d \circ d = 0$ takie, że dla $a \in A_i$ mamy $d(a) \in A_{i+1}$ oraz $d(a\cdot b) = d(a)\cdot b + (-1)^i a \cdot d(b)$. Gdy $A = \Lambda^\bullet V^*$ dla wybranego wektorem $v \in V$ przyjmujemy $d(\xi) := \mathrm{i}_v\xi$. Pokazać, że to jest DSCA. *Uwaga*: dobieramy taką konwencję iloczynu $\wedge$, zwężenia i_v oraz izomorfizmu $\Lambda^\bullet V^* \simeq (\Lambda^\bullet V)^*$ tak, abyśmy dla bazy $e_1, e_2, \dots, e_n$ przestrzeni V mieli

$$\mathrm{i}_{e_j}(e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}) = \begin{cases} (-1)^{\ell+1}\, \overbrace{e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}}^{\text{wyrzucone } e_{i_\ell}} & \text{gdy} \quad j = i_\ell \\ 0 & \text{gdy} \quad j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \end{cases}$$

gdzie $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

5. Dla danej przestrzeni wektorowej V skonstruować przemienną superalgebrę z różniczką $?(V)$ mający uniwersalną własność:

$$\mathrm{Hom}_{\text{prestrzenie wektorowe}}(V, A_0) = \mathrm{Hom}_{\text{DSCA}}(?(V), A)\,.$$