Klasówka z teorii mnogości, 29 listopada 2001

Rozwiązania zadań

Zadanie 1: Funkcja F jest na $P(\mathbb{N})$, bo każdy podzbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest postaci $F(x)$, gdzie x jest ciągiem stale równym A. Ale nie jest różnowartościowa, bo na przykład $F(x) = F(y)$ dla ciągu stałego $x(i) = \mathbb{N}$ i ciągu

$$y(i) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{jeśli } i \text{ jest parzyste;} \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dla $A = \emptyset$, jedyny ciąg x spełniający warunek $F(x) = \emptyset$ to ciąg stały $x(i) = \emptyset$. Zatem $\vec{F}^{-1}(\{\emptyset\})$ jest jednoelementowy. Natomiast jeśli $A \neq \emptyset$ to $\vec{F}^{-1}(\{A\})$ musi być nieskończony. Do tego przeciwobrazu należą bowiem wszystkie funkcje y_k postaci

$$y_k(i) = \begin{cases} A, & \text{jeśli } i = k; \\ \emptyset, & \text{jeśli } i \neq k, \end{cases}$$

gdzie k jest dowolną liczbą naturalną. A więc nie istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $\vec{F}^{-1}(\{A\})$ ma dokładnie cztery elementy.

Zadanie 2: Zaczynamy od części (a).

Zwrotność: Jeśli x jest parzyste to $x - x = 0$, a zero jest podzielne przez k. Jeśli zaś x jest nieparzyste, to $x \cdot x \geq 0$, przy czym nierówność jest ostra bo $x \neq 0$.

Symetria: Oczywista.

Przechodniość: Niech $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in \rho_k$. Wtedy x i z muszą być tej samej parzystości co y. Zatem wszystkie trzy liczby są parzyste albo wszystkie trzy są nieparzyste. W pierwszym przypadku mamy $x - z = (x - y) + (y - z)$. Suma liczb podzielnych przez k jest podzielna przez k, więc $\langle x, z\rangle \in \rho_k$. W drugim przypadku $x \cdot z = (x \cdot y) \cdot (y \cdot z) \cdot \frac{1}{y^2} > 0$ i też dobrze.

Wszystkie klasy abstrakcji naszej relacji są nieskończone. Jeśli a jest liczbą nieparzystą, to $[a]_{\rho_k} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b > 0\}$ albo $[a]_{\rho_k} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b < 0\}$. A jeśli a jest parzyste, to $[a]_{\rho_k} = \{a + nk \mid n \in \mathbb{Z} \text{ i } nk \text{ jest parzyste}\}$. A więc nie ma klasy k-elementowej.

Jeśli $k = 4$ to mamy 4 klasy abstrakcji:

- Klasę liczb nieparzystych dodatnich;
- Klasę liczb nieparzystych ujemnych;
- Klasę liczb podzielnych przez 4;
- Klasę liczb parzystych niepodzielnych przez 4.

W przypadku $k = 3$ jest pięć klas:

- Klasa liczb nieparzystych dodatnich;
- Klasa liczb nieparzystych ujemnych;
- Klasa liczb parzystych podzielnych przez 3;
- Klasa liczb parzystych dających resztę 1 z dzielenia przez 3;
- Klasa liczb parzystych dających resztę 2 z dzielenia przez 3.

Zadanie 3: Przykładem funkcji $f : \mathbf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbf{P}(\mathbb{N})$, która nie jest postaci $\Phi(T)$, dla żadnego T, jest funkcja określona warunkiem

$$f(A) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{jeśli } A = \emptyset; \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jeśli $T = \{\langle \{x\}, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$, to $\Phi(T) = \mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}$, bo wtedy $\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid \{x\} \subseteq a\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in a\} = a$. Aby uzyskać funkcję stałą musimy przyjąć $T = \{\langle \emptyset, x\rangle \mid x \in A\}$, dla wybranego A. Wtedy $\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in A\} = A$.

Przypuśćmy, że $\Phi(T) = \Phi(S)$ i przy tym $T \neq S$, na przykład $\langle a, x\rangle \in T - S$. Skoro $x \in \Phi(T)(a) = \Phi(S)(a)$, to $\langle b, x\rangle \in S$ dla pewnego podzbioru $b \subseteq a$. Stąd $x \in \Phi(S)(b) = \Phi(T)(b)$, więc jest takie $c \subseteq b$, że $\langle c, x\rangle \in T$. Wtedy $c \subseteq a$, więc $c = a$. Zatem $\langle a, x\rangle = \langle c, x\rangle \in S$ i mamy sprzeczność.