

Analiza matematyczna I, Wydział Nauk Ekonomicznych
rok akademicki 2011/12, semestr zimowy
II kolokwium, termin dodatkowy.

Imię i nazwisko

Numer indeksu

Nazwisko prowadzącego ćwiczenia

UWAGA! Test składa się z 15 równopunktowanych zadań, po 1 punkcie za każde zadanie. Prosimy wpisywać tylko wyniki (bez obliczeń), brudnopisów prosimy nie oddawać. Czas pracy – 90 minut. Nie wolno używać kalkulatorów!

1. Obliczyć sumę szeregu $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{15}} + \dots + \frac{1}{2^{6n-5}} + \frac{1}{2^{6n-3}} + \dots$

Odpowiedź:

2. Obliczyć sumę szeregu $\frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$

Odpowiedź:

3. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(4n-2)^2} + \frac{1}{(4n)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

jest:

(a) zbieżny na podstawie kryterium pierwiastkowego (Cauchy'ego) TAK/NIE:

(b) zbieżny, ponieważ wyraz ogólny szeregu dąży do zera TAK/NIE:

4. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-3} - \frac{1}{6n-1} + \dots$$

jest:

(a) zbieżny TAK/NIE:

(b) zbieżny warunkowo TAK/NIE:

5. Znaleźć zbiór wszystkich punktów $x \in \mathbb{R}$, dla których zbieżny jest szereg

$$1 - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - x^{11} + \dots + x^{4n-3} - x^{4n-1} + \dots$$

Odpowiedź:

6. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Odpowiedź:

ODWRÓCIĆ KARTKĘ!

7. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + 2})$.

Odpowiedź:

8. Znaleźć wszystkie wartości $a \in \mathbb{R}$, takie że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} a^2 x}{x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 1 + a & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

Odpowiedź:

9. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, określona wzorem $f(x) = \frac{-24x^3 + 2012x^2 + 1}{x^6 + 3x^3 + 3x^2 + 1}$ jest:

(a) ograniczona z góry

TAK/NIE:

(b) ograniczona z dołu

TAK/NIE:

10. Rozstrzygnąć, czy każda funkcja ciągła $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$:

(a) ma skończoną granicę lewostronną w punkcie 0

TAK/NIE:

(b) jest nieograniczona na przedziale $(-\infty, -1)$

TAK/NIE:

11. Znaleźć zbiór wszystkich punktów różniczkowalności funkcji $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x & \text{dla } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } x \geq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Odpowiedź:

12. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, określonej wzorem $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, w punkcie $(\frac{\pi}{4}, \frac{4}{\pi})$.

Odpowiedź:

13. Obliczyć pochodną funkcji $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, określonej wzorem $f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x}}$.

Odpowiedź:

14. Wyznaczyć kąt, pod jakim przecinają się styczne do wykresów funkcji $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ i $g(x) = \sin x$ w punkcie $(0, 0)$.

Odpowiedź:

15. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, obliczyć $(f^{-1})'(y_0)$ dla $y_0 = f(1)$, gdzie $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = xe^x$.

Odpowiedź: