

Analiza matematyczna I, Wydział Nauk Ekonomicznych  
rok akademicki 2012/13, semestr zimowy  
II kolokwium, 11 stycznia 2013 r.

Imię i nazwisko .....

Numer indeksu .....

Nazwisko prowadzącego ćwiczenia .....

**UWAGA!** Test składa się z 15 równo punktowanych zadań, po 1 punkcie za każde zadanie. Prosimy wpisywać tylko wyniki (bez obliczeń), brudnopisów prosimy nie oddawać. Czas pracy – 90 minut. Nie wolno używać kalkulatorów!

1. Obliczyć sumę szeregu  $\frac{1}{2^1} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{2n-1}{2^{2n-1}} - \frac{2n}{2^{2n}} + \dots$

Odpowiedź: .....

2. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{12^3} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{(6n-4)^3} + \frac{1}{(6n-2)^3} + \frac{1}{(6n)^3} - \frac{1}{(2n-1)^3} + \dots$$

jest

(a) zbieżny na podstawie kryterium pierwiastkowego (Cauchy'ego) TAK/NIE: .....

(b) zbieżny bezwzględnie TAK/NIE: .....

(c) zbieżny warunkowo TAK/NIE: .....

3. Znaleźć zbiór wszystkich parametrów  $p \in \mathbb{R}$ , dla których szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} \right)^p$  jest zbieżny.

Odpowiedź: .....

4. Znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$1 - 2^2 \left( \frac{x}{3} \right)^2 + 3^2 \left( \frac{x}{3} \right)^4 - 4^2 \left( \frac{x}{3} \right)^6 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 \left( \frac{x}{3} \right)^{2n-2} + \dots$$

Odpowiedź: .....

5. Obliczyć granicę  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{8-x}{\sin \frac{\pi x}{8}}$ .

Odpowiedź: .....

6. Obliczyć granicę  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x(x - \sqrt{x^2 - 1})}$ .

Odpowiedź: .....

7. Obliczyć granicę  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{3^x}$ .

Odpowiedź: .....

ODWRÓCIĆ KARTKĘ!

8. Znaleźć wszystkie wartości  $a \in \mathbb{R}$ , dla których można dobrać  $b \in \mathbb{R}$  takie, że funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4(e^{\frac{ax}{2}} - 1)}{x} & \text{dla } x < 0 \\ b & \text{dla } x = 0 \\ \frac{a \ln(1 + ax)}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

**Odpowiedź:** .....

9. Rozstrzygnąć, czy funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , określona wzorem  $f(x) = \frac{2013x^4 \sin(x^4)}{x^2 + 2x \cos x + 2}$

(a) jest ograniczona z dołu

**TAK/NIE:** .....

(b) przyjmuje maksimum

**TAK/NIE:** .....

(b) przyjmuje wartość 1

**TAK/NIE:** .....

10. Rozstrzygnąć, czy każda funkcja ciągła  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(a) ma skończoną pochodną lewostronną

**TAK/NIE:** .....

(b) ma funkcję odwrotną

**TAK/NIE:** .....

(c) odwzorowuje przedział  $(-1, 1)$  na pewien przedział otwarty

**TAK/NIE:** .....

11. Znaleźć zbiór wszystkich punktów różniczkowalności funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla } x \leq -1 \\ 1 + x^3 & \text{dla } -1 < x < 0 \\ \cos x & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

**Odpowiedź:** .....

12. Napisać równanie prostej stycznej w punkcie  $(e, 0)$  do wykresu funkcji  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , określonej wzorem  $f(x) = \ln(\ln x)$ .

**Odpowiedź:** .....

13. Obliczyć pochodną funkcji  $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ , określonej wzorem  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{x}}$ .

**Odpowiedź:** .....

14. Wyznaczyć kąt, pod jakim przecinają się proste styczne do wykresów funkcji  $f(x) = x \ln x$  i  $g(x) = \sqrt{3} \left( \frac{1}{e} - x \right) - \frac{1}{e}$  w punkcie  $\left( \frac{1}{e}, -\frac{1}{e} \right)$ .

**Odpowiedź:** .....

15. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, obliczyć  $(f^{-1})'(y_0)$  dla  $y_0 = \frac{\pi}{4}$ , gdzie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest określona wzorem  $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$ .

**Odpowiedź:** .....