

Analiza matematyczna I, Wydział Nauk Ekonomicznych
rok akademicki 2011/12, semestr zimowy
II kolokwium, 13 stycznia 2012 r.

Imię i nazwisko

Numer indeksu

Nazwisko prowadzącego ćwiczenia

UWAGA! Test składa się z 15 równopunktowanych zadań, po 1 punkcie za każde zadanie. Prosimy wpisywać tylko wyniki (bez obliczeń), brudnopisów prosimy nie oddawać. Czas pracy – 90 minut. Nie wolno używać kalkulatorów!

1. Obliczyć sumę szeregu $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{3n-2}} + \frac{1}{2^{3n-1}} + \dots$

Odpowiedź:

2. Obliczyć sumę szeregu $\frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{n+1}{2^n} + \dots$

Odpowiedź:

3. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{(4n-3)^2} + \frac{1}{(4n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} + \dots$$

jest:

(a) zbieżny na podstawie kryterium ilorazowego (d'Alemberta) TAK/NIE:

(b) zbieżny na podstawie kryterium o zagęszczaniu TAK/NIE:

4. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{6n-4} - \frac{1}{6n-2} - \frac{1}{6n} + \dots$$

jest:

(a) zbieżny TAK/NIE:

(b) zbieżny warunkowo TAK/NIE:

5. Znaleźć zbiór wszystkich punktów $x \in \mathbb{R}$, dla których zbieżny jest szereg

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - x^{15} + \dots + x^{6n-6} - x^{6n-3} + \dots$$

Odpowiedź:

6. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$.

Odpowiedź:

ODWRÓCIĆ KARTKĘ!

7. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 - 7})$.

Odpowiedź:

8. Znaleźć wszystkie wartości $a \in \mathbb{R}$, takie że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin a^2 x}{x} & \text{dla } x < 0 \\ 1 - a & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

Odpowiedź:

9. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, określona wzorem $f(x) = \frac{2012x^3 + 13x + 1}{x^6 + 4x^2 + 1}$ jest:

(a) ograniczona z góry

TAK/NIE:

(b) ograniczona z dołu

TAK/NIE:

10. Rozstrzygnąć, czy każda funkcja ciągła $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

(a) ma skończoną granicę prawostronną w punkcie 0

TAK/NIE:

(b) jest nieograniczona na przedziale $(1, +\infty)$

TAK/NIE:

11. Znaleźć zbiór wszystkich punktów różniczkowalności funkcji $f : (-\infty, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -\pi \\ \sin x & \text{dla } -\pi < x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x & \text{dla } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Odpowiedź:

12. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, określonej wzorem $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, w punkcie $(\pi, 0)$.

Odpowiedź:

13. Obliczyć pochodną funkcji $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, określonej wzorem $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\ln x}$.

Odpowiedź:

14. Wyznaczyć kąt, pod jakim przecinają się styczne do wykresów funkcji $f(x) = \sin^3 x$ i $g(x) = \operatorname{tg} x$ w punkcie $(0, 0)$.

Odpowiedź:

15. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, obliczyć $(f^{-1})'(y_0)$ dla $y_0 = f(1)$, gdzie $f : (e^{-1}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = 2x \ln x$.

Odpowiedź: