O skojarzeniach w grafach
Zadania I

Piotr Sankowski

1 kwietnia 2013

Zadania należy oddać przed wykładem w dniu 03/04/2013.

Zadanie 1

Załóżmy, że graf niedwudzielny $G = (V, E)$ ma doskonałe skojarzenie. Powiemy, że krawędź (i, j) jest dozwolona jeżeli należy do pewnego doskonałego skojarzenia w G. Zakładając, że algorytm Edmondsa działa w czasie $O(mn)$ (tzn., znalezienie jednej ścieżki powiekszającej zajmuje czas $O(m)$), zaproponuj jak go wykożystać do znalezienia wszystkich krawędzi dozwolonych w czasie $O(nm)$.

Zadanie 2

Pokaż, że jeżeli zachodzi $\frac{|E_H|}{|V_H|} \leq d$, dla każdego podgrafu $H = (V_H, E_H)$ grafu G, to wtedy G ma skierowanie, w którym każdy wierzchołek ma stopień wychodzący co najwyżej d. Skierowanie to nadanie krawędziom grafu jednego z dwóch kierunków.

Zadanie 3

Niech $G = (U, V, E)$ będzie danym grafem dwudzielnym. Powiemy, że $M \subseteq E$ jest przydziałem jeżeli każdy wierzchołek $u \in U$ ma jest końcem dokładnie jedenej krawędzi M. Niech $deg_M(v)$ oznacza stopień wierzchołka v w podgrafie M. Koszt wierzchołka $v \in V$ zdefiniujemy jako

$$cost_M(v) = \frac{deg_M(v)(deg_M(v) + 1)}{2}.$$

Całkowity koszt przydziału M zdefiniujmy jako $T(M) = \sum_{v \in V} cost_M(v)$. Zaproponuj algorytm wielomianowy znajdujący *optymalny przydział*, czyli przydział o najmniejszym koszcie.