Skojarzenia w grafach
Zadania V i VI

Piotr Sankowski

4 czerwca 2013

Zadania należy oddać do dnia 20/06/2013.

Zadanie 1

Rozważ model aukcji bez zazdrości, w którym masz n agentów, oraz m przedmiotów. Każdy agent i ma wartościowanie v_i za każdy przedmiot, oraz całkowity budżet b_i jaki jest gotowy zapłacić. *Alokacją proporcjonalną* nazwiemy alokacje, w której k przedmiotów sprzedawane jest w cenie $k \cdot p$, dla pewnego ustalonego p i dowolnego k. Zaproponuj algorytm $1 + \epsilon$-aproksymacyjny dla problemu optymalnej sprzedaży proporcjonalnej przy założeniu, że algorytm optymalny sprzedaje co najmniej n^2/ϵ przedmiotów?

Zadanie 2

Rozważ model aukcji taki jak w Zadaniu 1. Masz daną ustalony przydział przedmiotów do agentów, tzn., wiesz, że każdy gracz otrzymuje m_i przedmiotów, gdzie $\sum m_i \leq m$. Zaproponuj algorytm, który sprawdzi, czy dla tego przydziały można znaleźć ceny, takie aby uzyskana alokacja była pozbawiona zazdrości?

Zadanie 3

Rozważ aukcje w której chcesz sprzedać dokładnie jeden przedmiot. Zaproponuj mechanizm, który będzie:

(a) zgodny motywacyjnie i pozbawiony zazdrości,

(b) niezgodny motywacyjnie, ale pozbawiony zazdrości,

(c) zgodny motywacyjnie, ale w którym występuje zazdrość.

Zadanie 4

Rozważmy problem stabilnych małżeństw i załóżmy, że macierz utworzona z list preferencji mężczyzn tworzy kwadrat łaciński, tzn. w każdej kolumnie występuje każda kobieta. Udowodnij, że wszystkie skojarzenia utworzone przez kolumny tej macierzy są stabilne wtedy i tylko wtedy gdy macierz preferencji kobiet jest dualnym kwadratem łacińskim? W dualnym kwadracie a jest j-tym wyborem A wtedy i tylko wtedy gdy A jest $(n+1-j)$-tym wyborem a, dla każdego a oraz A.

Zadanie 5

Rozważmy następującą modyfikacje problemu alokacji domów. Mamy dane n graczy $N = f_1, \ddots, f_n$, każdy z nich posiada dom. Co więcej istnieje hotel, który oferuje każdemu z graczy pokój z pełnym serwisem w zamian za jego dom. Hotel w tej grze nie jest graczem, a każdy z graczy ma ścisłą listę preferencji określoną na wszystkich domach i hotelu. Hotel ma dość pokoi dla wszystkich graczy. Zaproponuj jak efektywnie znaleźć stabilny przydział graczy do domów oraz pokojów hotelowych, taki aby żadna grupa graczy nie chciała zmienić tego przydziału?

Zadanie 6

Udowodnij, że jeżeli graf G rozpięty na parzystej liczbie wierzchołków p ma więcej niż $\binom{p-1}{2}$ krawędzi, to zawiera doskonałe skojarzenie.