Skojarzenia w grafach
Zadania II

Piotr Sankowski

29 kwietnia 2013

Zadania należy oddać przed wykładem w dniu 08/05/2013.

Zadanie 1

W problemie najlżejszych doskonałych skojarzeń masz dany pełny dwudzielny graf $G = (V, U, E)$ taki, że $|V| = |U|$ oraz funkcję wag krawędzi $w : E \to \mathcal{R}^+$. W wersji online tego problemu wierzchołki ze zbioru V ujawnianie są w kolejności $1, \ldots, n$ i wraz z wagami sąsiednich do nich krawędzi. Po pojawieniu się wierzchołka v musimy go zawsze podłączyć do wybranego przez nas wierzchołka $u \in U$. Podłączenie to kosztuje nas $w(vu)$. Pokaż, że:

- żaden deterministyczny algorytm nie może mieć skończonego współczynnika kompetytywności,
- pokaż serię grafów $G_1, \ldots, G_k$ oraz rozkład na nich taki, że oczekiwany koszt każdego deterministyczny algorytmu dla tej serii grafów, będzie wielokrotnie wyższy niż oczekiwany koszt rozwiązania optymalnego dla tych grafów,
- korzystając z poprzedniego punktu i Twierdzenia Yao
`http://en.wikipedia.org/wiki/Yao's_principle`
pokaż, że żaden randomizowany algorytm nie może mieć skończonego współczynnika kompetytywności.

Zadanie 2

Bądzisław ma do zrobienia n interesów ze zbioru N. W każdej rundzie może on wybrać jeden z nich $x \in N$ i otrzymuje za to zysk $z(x)$. Po każdej rundzie znika dowolny podzbiór interesów ze zbioru N, tzn. w kolejnej rundzie zbiór dostępnych interesów jest podzbiorem zbioru interesów dostępnych w poprzedniej rundzie. Bądzisław nie wie, które interesy znikają w danej rundzie. Pomóż mu konstruując algorytm o stałym współczynniku kompetytywności.

Zadanie 3

Rozważmy pełny graf dwudzielny $G = (V, U, E)$ gdzie $V = [1..k]$ oraz $U = [1..n]$. Zakładamy, że koszt krawędzi łączącej j'ty wierzchołek z i'tym wierzchołkiem wynosi $\alpha_{ij} = \mu_i \beta_j$, dla pewnych μ_i oraz β_j. Zakładamy również, że $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_m$. Zaproponuj jak najprostszy algorytm znajdujący najcięższe skojarzenie w G?