Maksymalne skojarzenia przy pomocy eliminacji Gaussa

Piotr Sankowski

Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Poprzednie wyniki

Dotychczas usłyszeliśmy o algorytmie działającym w czasie:

- $O(m\sqrt{n})$ dla grafów dwudzielnych — Hopcroft, Karp,

Poprzednie wyniki

Dotychczas usłyszeliśmy o algorytmie działającym w czasie:

- $O(m\sqrt{n})$ dla grafów dwudzielnych — Hopcroft, Karp,

Dla grafów gęstych otrzymujemy czas $O(n^{2.5})$.

Techniki algebraiczne

Techniki algebraicznie:

- $O(n^\omega) = O(n^{2.38})$ testowanie i wyznaczanie liczności — Lovász,

Techniki algebraiczne

Techniki algebraicznie:

- $O(n^{\omega}) = O(n^{2.38})$ testowanie i wyznaczanie liczności — Lovász,
- $O(n^{\omega+1}) = O(n^{3.38})$ znajdowanie — Rabin, Vazirani.

Nasze wyniki

Nowa metoda oparta na eliminacji Gaussa.

Nasze wyniki

Nowa metoda oparta na eliminacji Gaussa.

Algebraicznie algorytmy znajdujące najliczniejsze skojarzenie w grafach:

Nasze wyniki

Nowa metoda oparta na eliminacji Gaussa.

Algebraicznie algorytmy znajdujące najliczniejsze skojarzenie w grafach:

- bardzo prosty algorytm $O(n^3)$,

Nasze wyniki

Nowa metoda oparta na eliminacji Gaussa.

Algebraicznie algorytmy znajdujące najliczniejsze skojarzenie w grafach:

- bardzo prosty algorytm $O(n^3)$,
- algorytm $O(n^\omega) = O(n^{2.38})$.

Nasze wyniki

Nowa metoda oparta na eliminacji Gaussa.

Algebraicznie algorytmy znajdujące najliczniejsze skojarzenie w grafach:

- bardzo prosty algorytm $O(n^3)$,
- algorytm $O(n^\omega) = O(n^{2.38})$.

Obydwa algorytmy są randomizowane.

Plan

1. Technika Lovásza,

Plan

1. Technika Lovásza,
2. Maksymalne skojarzenia,

Plan

1. Technika Lovásza,
2. Maksymalne skojarzenia,
3. Rabin and Vazirani,

Plan

1. Technika Lovásza,
2. Maksymalne skojarzenia,
3. Rabin and Vazirani,
4. Eliminacja Gaussa,

Plan

1. Technika Lovásza,
2. Maksymalne skojarzenia,
3. Rabin and Vazirani,
4. Eliminacja Gaussa,
5. Proste algorytmy $O(n^3)$,

Plan

1. Technika Lovásza,
2. Maksymalne skojarzenia,
3. Rabin and Vazirani,
4. Eliminacja Gaussa,
5. Proste algorytmy $O(n^3)$,
6. Algorytm $O(n^\omega)$ dla grafów dwudzielnych,

Plan

1. Technika Lovásza,
2. Maksymalne skojarzenia,
3. Rabin and Vazirani,
4. Eliminacja Gaussa,
5. Proste algorytmy $O(n^3)$,
6. Algorytm $O(n^\omega)$ dla grafów dwudzielnych,
7. Ważone skojarzenia w grafach dwudzielnych.

Szybkie mnożenie macierzy

Niech ω oznacza wykładnik mnożenia macierzy rozmiaru $n \times n$.

Szybkie mnożenie macierzy

Niech ω oznacza wykładnik mnożenia macierzy rozmiaru $n \times n$.

Twierdzenie 1 (Coppersmith i Winograd '90)

$$\omega < 2.376.$$

Szybkie mnożenie macierzy

Niech ω oznacza wykładnik mnożenia macierzy rozmiaru $n \times n$.

Twierdzenie 1 (Coppersmith i Winograd '90)

$$\omega < 2.376.$$

Twierdzenie 2 (Bunch i Hopcroft '74)
LU-faktoryzację macierzy można policzyć w czasie $O(n^\omega)$.

Szybkie mnożenie macierzy

Niech ω oznacza wykładnik mnożenia macierzy rozmiaru $n \times n$.

Twierdzenie 1 (Coppersmith i Winograd '90)

$$\omega < 2.376.$$

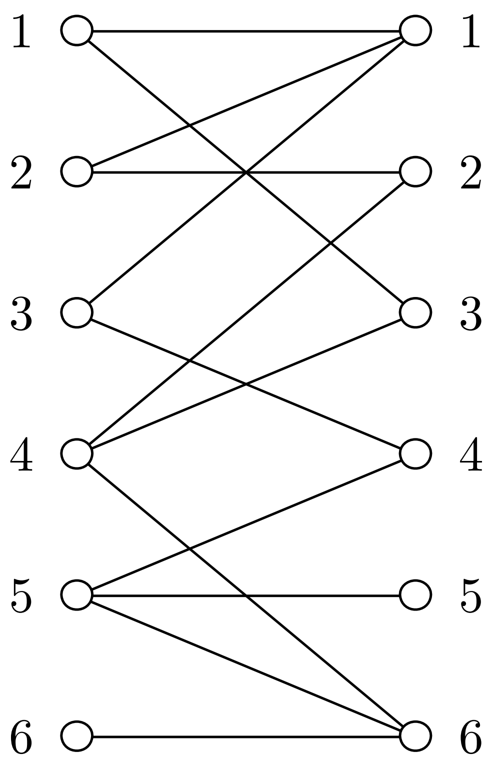
Twierdzenie 2 (Bunch i Hopcroft '74)
LU-faktoryzację macierzy można policzyć w czasie $O(n^\omega)$.

Twierdzenie 3 (Ibarra, Moran i Hui '82)
Maksymalną nieosobliwą podmacierz można znaleźć w czasie $O(n^\omega)$.

Symboliczna macierz sąsiedztwa

Symboliczna macierz sąsiedztwa grafu dwudzielnego:

G



$$\Longrightarrow \quad \tilde{A}(G) = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & 0 & x_{34} & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 & x_{46} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & x_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{66} \end{pmatrix}$$

Symboliczna macierz sąsiedztwa

$$\det\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & 0 & x_{34} & 0 & 0 \\ 0 & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 & x_{46} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & x_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{66} \end{pmatrix} =$$

$$= -x_{13}x_{21}x_{34}x_{42}x_{55}x_{66} - x_{11}x_{22}x_{34}x_{43}x_{55}x_{66}.$$

Jednomiany wyznacznika odpowiadają doskonałym skojarzeniom w G.

Symboliczna macierz sąsiedztwa

Wyznacznik jest dany przez:

$$\det(A) = \sum_{p \in \Pi_n} \sigma(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p_i}.$$

Symboliczna macierz sąsiedztwa

Wyznacznik jest dany przez:

$$\det(A) = \sum_{p \in \Pi_n} \sigma(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p_i}.$$

Niezerowy składnik tej sumy dla każdego wierzchołka i zadaje inny wierzchołek p_i.

Symboliczna macierz sąsiedztwa

Wyznacznik jest dany przez:

$$\det(A) = \sum_{p \in \Pi_n} \sigma(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p_i}.$$

Niezerowy składnik tej sumy dla każdego wierzchołka i zadaje inny wierzchołek p_i.

Składniki sumy odpowiadają doskonałym skojarzeniem w grafie.

Symboliczna macierz sąsiedztwa

Twierdzenie 4 (Tutte (1947)) $\det \tilde{A}(G) \neq 0$ *wttw gdy G ma doskonałe skojarzenie.*

Symboliczna macierz sąsiedztwa

Twierdzenie 4 (Tutte (1947)) $\det \tilde{A}(G) \neq 0$ *wttw gdy G ma doskonałe skojarzenie.*

Wyznacznik jest dany przez:

$$\det(A) = \sum_{p \in \Pi_n} \sigma(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p_i}.$$

Symboliczna macierz sąsiedztwa

Twierdzenie 4 (Tutte (1947)) $\det \tilde{A}(G) \neq 0$ *wttw gdy G ma doskonałe skojarzenie.*

Wyznacznik jest dany przez:

$$\det(A) = \sum_{p \in \Pi_n} \sigma(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p_i}.$$

Daje się uogólnić na grafy dowolne.

Symboliczna macierz sąsiedztwa

Wartość $\det \tilde{A}(G)$ to wielomian n^2 zmiennych stopnia n. Może mieć wykładniczo wiele składników.

Symboliczna macierz sąsiedztwa

Wartość $\det \tilde{A}(G)$ to wielomian n^2 zmiennych stopnia n. Może mieć wykładniczo wiele składników.

Nie można go szybko wyliczyć, ale można szybko przetestować czy jest niezerowy.

Pomysł Lovásza

Podstaw za zmienne w $\tilde{A}(G)$ losowe wartości i policz wyznacznik otrzymanej w ten sposób macierzy $A(G)$ — *losowej macierzy sąsiedztwa*.

Z dużym prawdopodobieństwem $\det A(G) \neq 0$ wttw $\det \tilde{A}(G) \neq 0$, bo „wielomiany nie maja zbyt wielu zer”.

Pomysł Lovásza

Lemat 5 (Zippel, Schwartz) *Niech* $f(x_1, \ldots, x_k)$ *będzie wielomianem stopnia* d *nad ciałem* F*. Liczba zer* f *w* F^k *jest nie większa niż* $\frac{d}{|F|}|F|^k$.

Pomysł Lovásza

Lemat 5 (Zippel, Schwartz) *Niech $f(x_1, \ldots, x_k)$ będzie wielomianem stopnia d nad ciałem F. Liczba zer f w F^k jest nie większa niż $\frac{d}{|F|}|F|^k$.*

Niech $F = \mathcal{Z}_p$ dla liczby pierwszej $p = \Theta(n^{1+c})$. Operacje w Z_p wykonujemy w czasie stałym

Pomysł Lovásza

Lemat 5 (Zippel, Schwartz) *Niech* $f(x_1, \ldots, x_k)$ *będzie wielomianem stopnia* d *nad ciałem* F*. Liczba zer* f *w* F^k *jest nie większa niż* $\frac{d}{|F|}|F|^k$.

Niech $F = \mathcal{Z}_p$ dla liczby pierwszej $p = \Theta(n^{1+c})$. Operacje w Z_p wykonujemy w czasie stałym

Prawdopodobieństwo otrzymania *fałszywego zera* jest $O(\frac{1}{n^c})$.

Pomysł Lovásza

Algorytm $O(n^\omega)$ (Monte Carlo) testujący, czy graf G ma doskonałe skojarzenie:

podstaw pod zmienne w $\tilde{A}(G)$
losowe elementy $\mathcal{Z}_P$
niech $A(G)$ będzie otrzymaną macierzą
if det $A(G) <> 0$ **then**
    return "TAK"
else
    return "NIE"

Pomysł Lovásza

Algorytm $O(n^{\omega+2})$ (Monte Carlo) znajdujący w G doskonałe skojarzenie:

$M := \emptyset$
for $e \in E$ **do**
    if $G - e$ ma doskonałe skojarzenie **then**
        usuń e wraz z końcami z G
        dodaj e do M

Maksymalne skojarzenia

Twierdzenie 6 (Lovász (79)) *Niech m będzie rozmiarem najliczniejszego skojarzenia w G, wtedy* $\mathrm{rank}(\tilde{A}(G)) = m$.

Maksymalne skojarzenia

Twierdzenie 6 (Lovász (79)) *Niech m będzie rozmiarem najliczniejszego skojarzenia w G, wtedy* $\mathrm{rank}(\tilde{A}(G)) = m$.

Rangę $\tilde{A}(G)$ można policzyć w czasie $O(n^{\omega})$.

Maksymalne skojarzenia

Twierdzenie 6 (Lovász (79)) *Niech m będzie rozmiarem najliczniejszego skojarzenia w G, wtedy* $\operatorname{rank}(\tilde{A}(G)) = m$.

Rangę $\tilde{A}(G)$ można policzyć w czasie $O(n^{\omega})$.

Niech M będzie skojarzeniem wtedy z twierdzenia Tutte $\tilde{A}_{V(M),V(M)}(G)$ jest nieosobliwa — $\operatorname{rank}(\tilde{A}(G)) \geq m$.

Maksymalne skojarzenia

Niech $\tilde{A}_{X,Y}(G)$ będzie maksymalną nieosobliwą podmacierzą $\tilde{A}(G)$.

Maksymalne skojarzenia

Niech $\tilde{A}_{X,Y}(G)$ będzie maksymalną nieosobliwą podmacierzą $\tilde{A}(G)$.

Wyznacznik $\tilde{A}_{X,Y}$ jest niezerowy.

Maksymalne skojarzenia

Niech $\tilde{A}_{X,Y}(G)$ będzie maksymalną nieosobliwą podmacierzą $\tilde{A}(G)$.

Wyznacznik $\tilde{A}_{X,Y}$ jest niezerowy.

Istnieje w $\det(\tilde{A}_{X,Y})$ niezerowa permutacja p.

Maksymalne skojarzenia

Niech $\tilde{A}_{X,Y}(G)$ będzie maksymalną nieosobliwą podmacierzą $\tilde{A}(G)$.

Wyznacznik $\tilde{A}_{X,Y}$ jest niezerowy.

Istnieje w $\det(\tilde{A}_{X,Y})$ niezerowa permutacja p.

p zadaje skojarzenie więc $\mathrm{rank}(\tilde{A}(G)) \leq m$.

Algorytm Rabina i Vaziraniego

$A^{-1}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A^{j,i} / \det A$, gdzie $A^{j,i}$ to A z usuniętym j-tym wierszem i i-tą kolumną.

Algorytm Rabina i Vaziraniego

$A^{-1}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A^{j,i} / \det A$, gdzie $A^{j,i}$ to A z usuniętym j-tym wierszem i i-tą kolumną.

Jeżeli G to graf dwudzielny to, wtedy $A^{j,i} = A(G - \{u_j, v_i\})$.

Algorytm Rabina i Vaziraniego

$A^{-1}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A^{j,i} / \det A$, gdzie $A^{j,i}$ to A z usuniętym j-tym wierszem i i-tą kolumną.

Jeżeli G to graf dwudzielny to, wtedy $A^{j,i} = A(G - \{u_j, v_i\})$.

Macierz $A(G)^{-1}$ koduje które krawędzie w G są *dozwolone*, tj. zawarte w pewnym doskonałym skojarzeniu.

Algorytm Rabina i Vaziraniego

Algorytm $O(n^{\omega+1}) = O(n^{3.38})$ (Monte Carlo) na znajdowanie doskonałego skojarzenia w G:

$M := \emptyset$
while G niepusty **do**
    policz $A^{-1}(G)$
    znajdź dozwoloną krawędź $e \in E$
    usuń e wraz z końcami z G
    dodaj e do M

Eliminacja Gaussa

Twierdzenie 7 (Twierdzenie o eliminacji)
Niech

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & v^T \\ u & B \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{1,1} & \hat{v}^T \\ \hat{u} & \hat{B} \end{pmatrix},$$

gdzie $\hat{a}_{1,1} \neq 0$. *Wtedy* $B^{-1} = \hat{B} - \hat{u}\hat{v}^T / \hat{a}_{1,1}$.

Jest to pojedynczy krok algorytmu eliminacji Gaussa.

Algorytm $O(n^3)$

Algorytm Monte Carlo znajdujący doskonałe skojarzenie w danym grafie G w czasie $O(n^3)$:

$M := \emptyset$
oblicz $A^{-1}(G)$
while G non-empty **do**
    znajdź dozwoloną krawędź $e \in E$
    usuń e wraz z końcami z G
    dodaj e do M
    uaktualnij $A^{-1}(G)$
        używając eliminacji Gaussa

Leniwe obliczenia

$$u_1 v_1^T + \ldots + u_k v_k^T = \left(\begin{array}{c|c|c} u_1 & \ldots & u_k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline v_k^T \end{array} \right)$$

Eliminacja bez zamian

Algorytm wykonujący eliminację Gaussa bez zamian wierszy ani kolumn w czasie $O(n^\omega)$.

for $i := 1$ **to** n **do**
  leniwie eliminuj i-ty wiersz i i-tą kolumnę
  niech k będzie takie, że $2^k \mid i$, ale $2^{k+1} \nmid i$
  uaktualnij wiersze i kolumny
    o numerach $i+1, \ldots, i+2^k$

Eliminacja bez zamian

W każdym kroku wykonujemy mnożenie macierzy $n \times 2^k$ przez macierz $2^k \times 2^k$ w czasie $(n/2^k)(2^k)^\omega = n2^{k(\omega-1)}$.

Eliminacja bez zamian

W każdym kroku wykonujemy mnożenie macierzy $n \times 2^k$ przez macierz $2^k \times 2^k$ w czasie $(n/2^k)(2^k)^\omega = n2^{k(\omega-1)}$.

Konkretna wartość k pojawia się $n/2^k$ razy, a zatem obliczenia dla ustalonego k wymagają czasu $n^2 2^{k(\omega-2)} = n^2(2^{\omega-2})^k$.

Eliminacja bez zamian

W każdym kroku wykonujemy mnożenie macierzy $n \times 2^k$ przez macierz $2^k \times 2^k$ w czasie $(n/2^k)(2^k)^\omega = n2^{k(\omega-1)}$.

Konkretna wartość k pojawia się $n/2^k$ razy, a zatem obliczenia dla ustalonego k wymagają czasu $n^2 2^{k(\omega-2)} = n^2(2^{\omega-2})^k$.

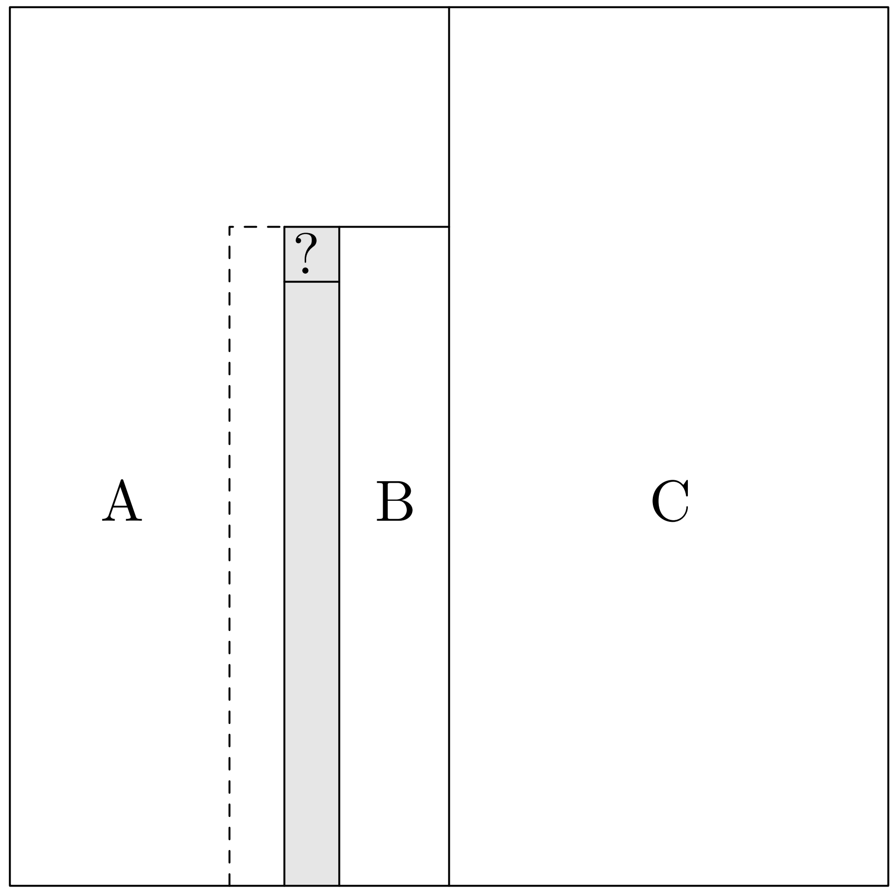
$$\sum_{k=0}^{\log n} n^2(2^{\omega-2})^k \leq Cn^2(2^{\omega-2})^{\log n} = Cn^2 n^{\omega-2} = Cn^\omega.$$

Eliminacja bez zamian kolumn

Algorytm Hopcrofta-Buncha wykonujący eliminację Gaussa bez zamian kolumn w czasie $O(n^\omega)$.

for $i := 1$ **to** n **do**
    znajdź wiersz j taki, że $A_{i,j} \neq 0$
    leniwie eliminuj j-ty wiersz i i-tą kolumnę
    niech k będzie takie, że $2^k \mid i$, ale $2^{k+1} \nmid i$
    uaktualnij kolumny $i+1, \ldots, i+2^k$

Eliminacja bez zamian kolumn



Przypadek dwudzielny

Twierdzenie 8 *Doskonałe skojarzenie w grafie dwudzielnym można znaleĽć w czasie* $O(n^{\omega})$ *przy pomocy zmodyfikowanego algorytmu Hopcrofta-Buncha.*

Podsumowanie I

Pokazaliśmy następujące algorytmy dla problemu maksymalnego skojarzenia:

Podsumowanie I

Pokazaliśmy następujące algorytmy dla problemu maksymalnego skojarzenia:

1. Bardzo prosty algorytm o złożoności $O(n^3)$;

Podsumowanie I

Pokazaliśmy następujące algorytmy dla problemu maksymalnego skojarzenia:

1. Bardzo prosty algorytm o złożoności $O(n^3)$;
2. Prosty Algorytm dla grafów dwudzielnych o złożoności $O(n^\omega)$;

Podsumowanie I

Pokazaliśmy następujące algorytmy dla problemu maksymalnego skojarzenia:

1. Bardzo prosty algorytm o złożoności $O(n^3)$;
2. Prosty Algorytm dla grafów dwudzielnych o złożoności $O(n^\omega)$;
3. Kolejne wykłady algorytm dla dowolnych grafów o złożoności $O(n^\omega)$.

Podsumowanie I

Pokazaliśmy następujące algorytmy dla problemu maksymalnego skojarzenia:

1. Bardzo prosty algorytm o złożoności $O(n^3)$;
2. Prosty Algorytm dla grafów dwudzielnych o złożoności $O(n^\omega)$;
3. Kolejne wykłady algorytm dla dowolnych grafów o złożoności $O(n^\omega)$.
4. Kolejne wykłady algorytm dla grafów planarnych o złożoności $O(n^{\omega/2}) = O(n^{1.19})$.

Problem

Nie ważony problem skojarzeń można rozwiązać w czasie $O(n^{\omega})$.

Problem

Nie ważony problem skojarzeń można rozwiązać w czasie $O(n^{\omega})$.

Czy wynik ten może być rozszerzony na skojarzenia nie ważone?

Problem

Nie ważony problem skojarzeń można rozwiązać w czasie $O(n^\omega)$.

Czy wynik ten może być rozszerzony na skojarzenia nie ważone?

TAK — w czasie $O(Wn^\omega)$

Outline

- Historia

Outline

- Historia
- Szkic algorytmu

Outline

- Historia
- Szkic algorytmu
- Algorytm dla ważonych skojarzeń

Outline

- Historia
- Szkic algorytmu
- Algorytm dla ważonych skojarzeń
- Podsumowanie

Outline

- Historia
- Szkic algorytmu
- Algorytm dla ważonych skojarzeń
- Podsumowanie

Ważone skojarzenia dwudzielne

- $O(WnVC(n, m))$ implicite – Egerváry (1931),

Ważone skojarzenia dwudzielne

- $O(WnVC(n, m))$ implicite – Egerváry (1931),
- $O(n^4)$ – Khun (1955) and Munkers (1957),

Ważone skojarzenia dwudzielne

- $O(WnVC(n,m))$ implicite – Egerváry (1931),
- $O(n^4)$ – Khun (1955) and Munkers (1957),
- $O(n^2m)$ – Iri (1960),

Ważone skojarzenia dwudzielne

- $O(WnVC(n,m))$ implicite – Egerváry (1931),
- $O(n^4)$ – Khun (1955) and Munkers (1957),
- $O(n^2m)$ – Iri (1960),
- $O(n^3)$ – Dintis and Kronrod (1969),

Ważone skojarzenia dwudzielne

- $O(WnVC(n,m))$ implicite – Egerváry (1931),
- $O(n^4)$ – Khun (1955) and Munkers (1957),
- $O(n^2m)$ – Iri (1960),
- $O(n^3)$ – Dintis and Kronrod (1969),
- $O(nSP_+(n,m))$ – Edmonds and Karp (1970),

Ważone skojarzenia dwudzielne

- $O(WnVC(n,m))$ implicite – Egerváry (1931),
- $O(n^4)$ – Khun (1955) and Munkers (1957),
- $O(n^2m)$ – Iri (1960),
- $O(n^3)$ – Dintis and Kronrod (1969),
- $O(nSP_+(n,m))$ – Edmonds and Karp (1970),
- $O(n^{\frac{3}{4}}m\log W)$ Gabow (1983),

Ważone skojarzenia dwudzielne

- $O(WnVC(n,m))$ implicite – Egerváry (1931),
- $O(n^4)$ – Khun (1955) and Munkers (1957),
- $O(n^2m)$ – Iri (1960),
- $O(n^3)$ – Dintis and Kronrod (1969),
- $O(nSP_+(n,m))$ – Edmonds and Karp (1970),
- $O(n^{\frac{3}{4}}m \log W)$ Gabow (1983),
- $O(\sqrt{n}m \log(nW))$ – Gabow and Tarjan (1991),

Ważone skojarzenia dwudzielne

- $O(WnVC(n,m))$ implicite – Egerváry (1931),
- $O(n^4)$ – Khun (1955) and Munkers (1957),
- $O(n^2m)$ – Iri (1960),
- $O(n^3)$ – Dintis and Kronrod (1969),
- $O(nSP_+(n,m))$ – Edmonds and Karp (1970),
- $O(n^{\frac{3}{4}}m\log W)$ Gabow (1983),
- $O(\sqrt{n}m\log(nW))$ – Gabow and Tarjan (1991),
- $O(\sqrt{n}mW)$ – Kao, Lam, Sung and Ting (1999),

Ważone skojarzenia dwudzielne

- $O(WnVC(n,m))$ implicite – Egerváry (1931),
- $O(n^4)$ – Khun (1955) and Munkers (1957),
- $O(n^2m)$ – Iri (1960),
- $O(n^3)$ – Dintis and Kronrod (1969),
- $O(nSP_+(n,m))$ – Edmonds and Karp (1970),
- $O(n^{\frac{3}{4}}m\log W)$ Gabow (1983),
- $O(\sqrt{n}m\log(nW))$ – Gabow and Tarjan (1991),
- $O(\sqrt{n}mW)$ – Kao, Lam, Sung and Ting (1999),
- $O(n^\omega W)$ – dziś.

Idea

Weighted Matching

Reduction in $O(Wn^{\omega})$ time

Unweighted Matching

$O(n^{\omega})$ time

Idea

Weighted Matching

???

Unweighted Matching

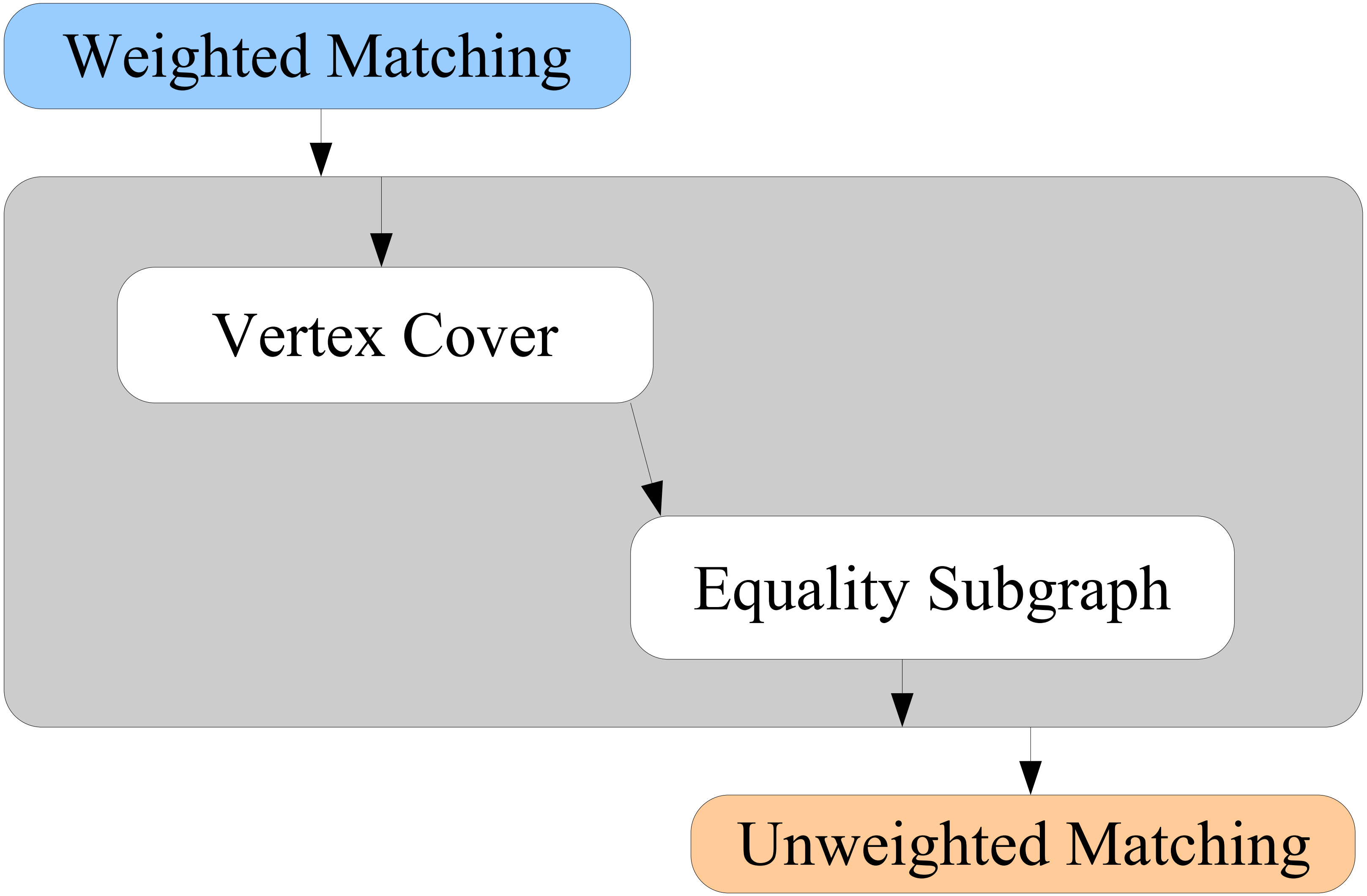
Idea

Weighted Matching

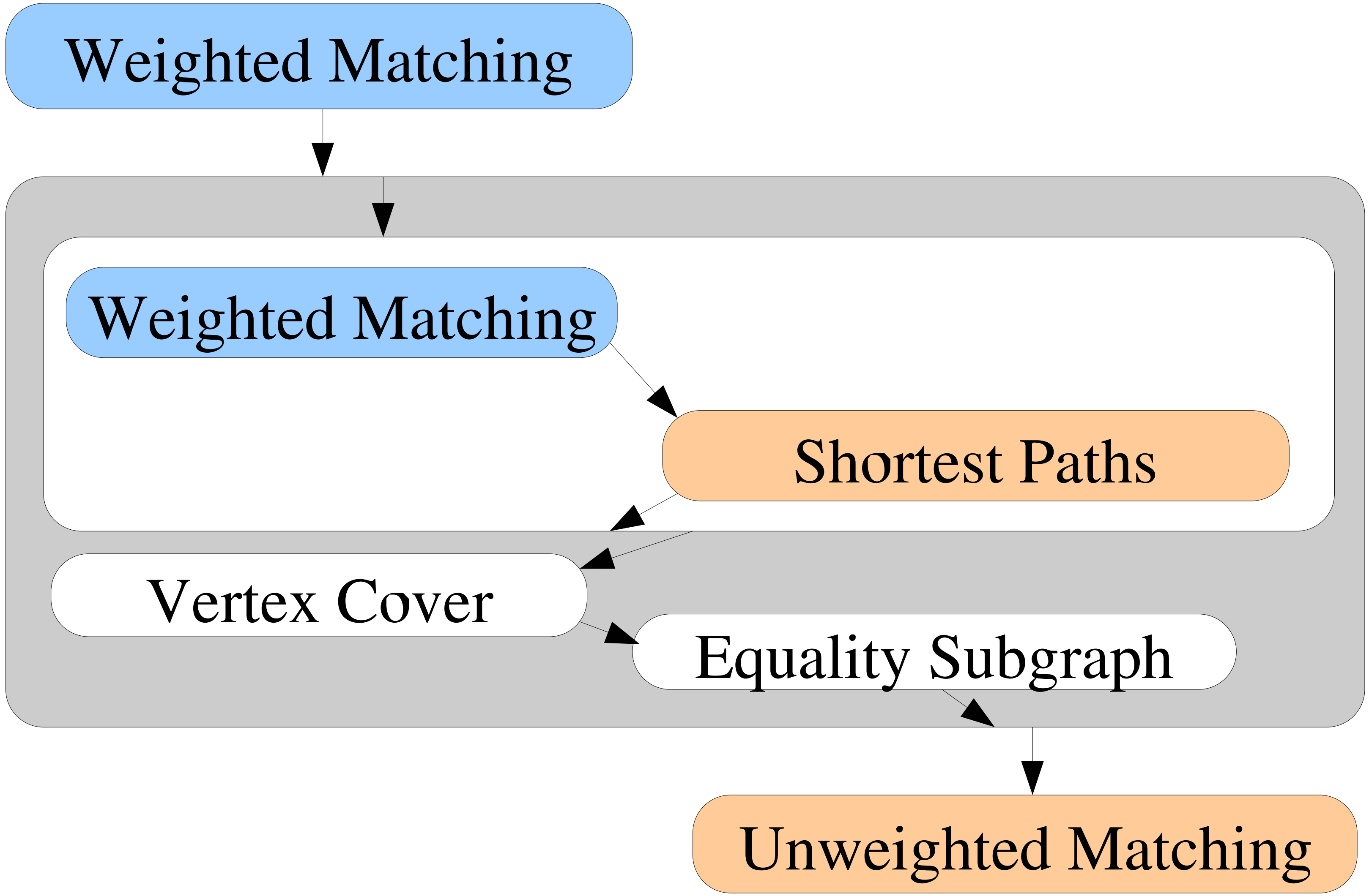
???!!!

Unweighted Matching

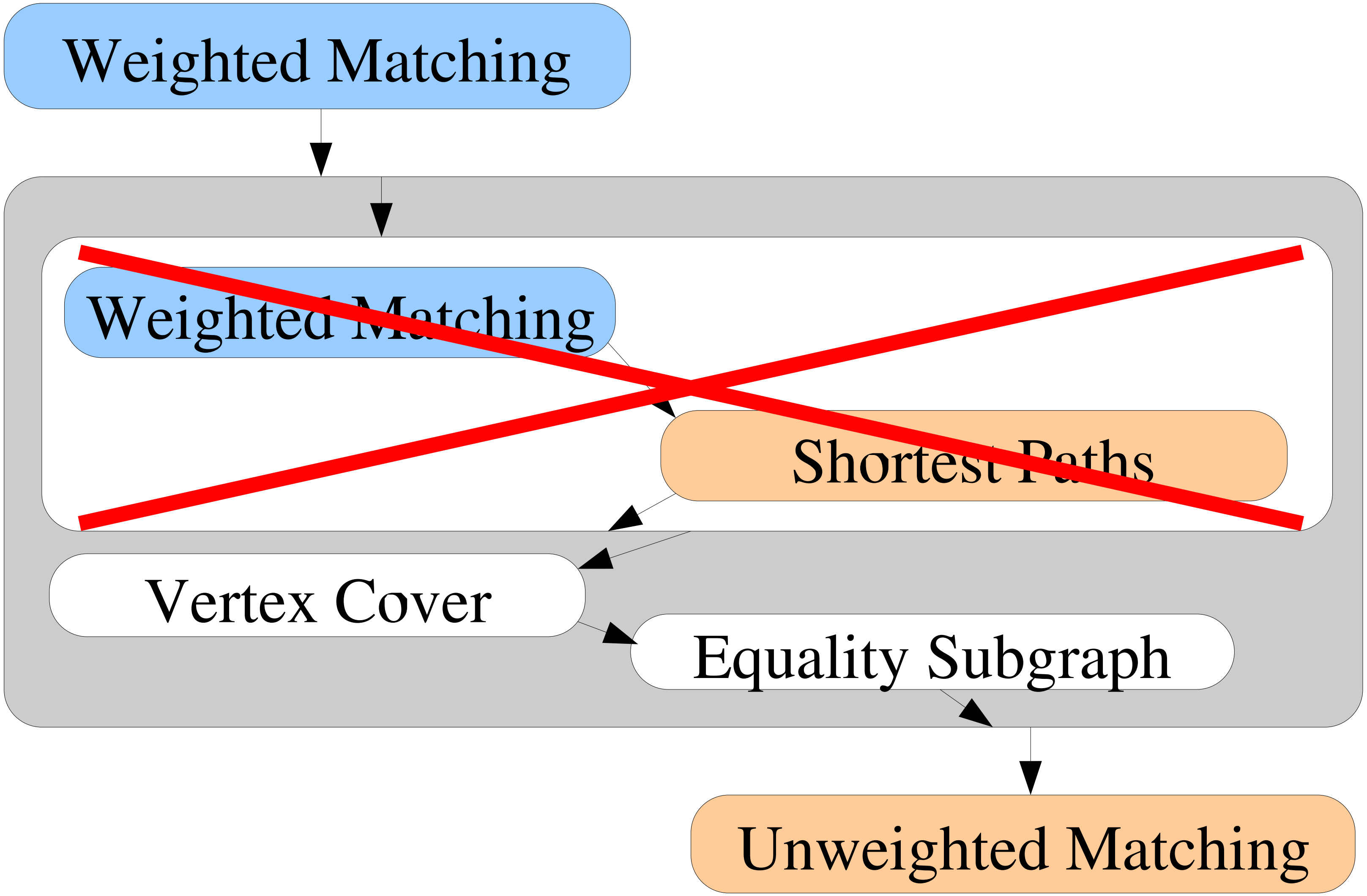
Idea


Weighted Matching
Vertex Cover
Equality Subgraph
Unweighted Matching

Idea

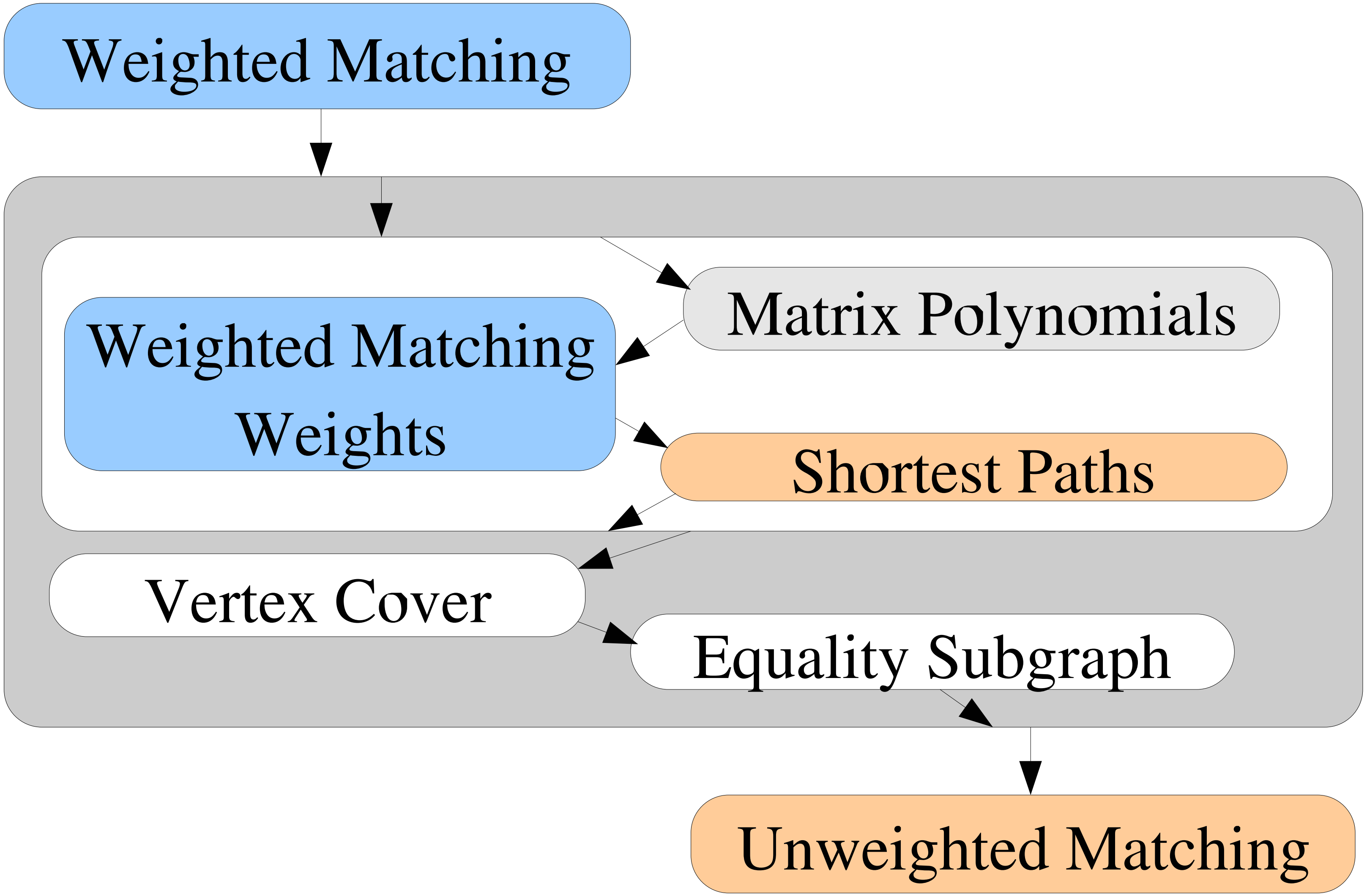

Weighted Matching
Weighted Matching
Shortest Paths
Vertex Cover
Equality Subgraph
Unweighted Matching

Idea



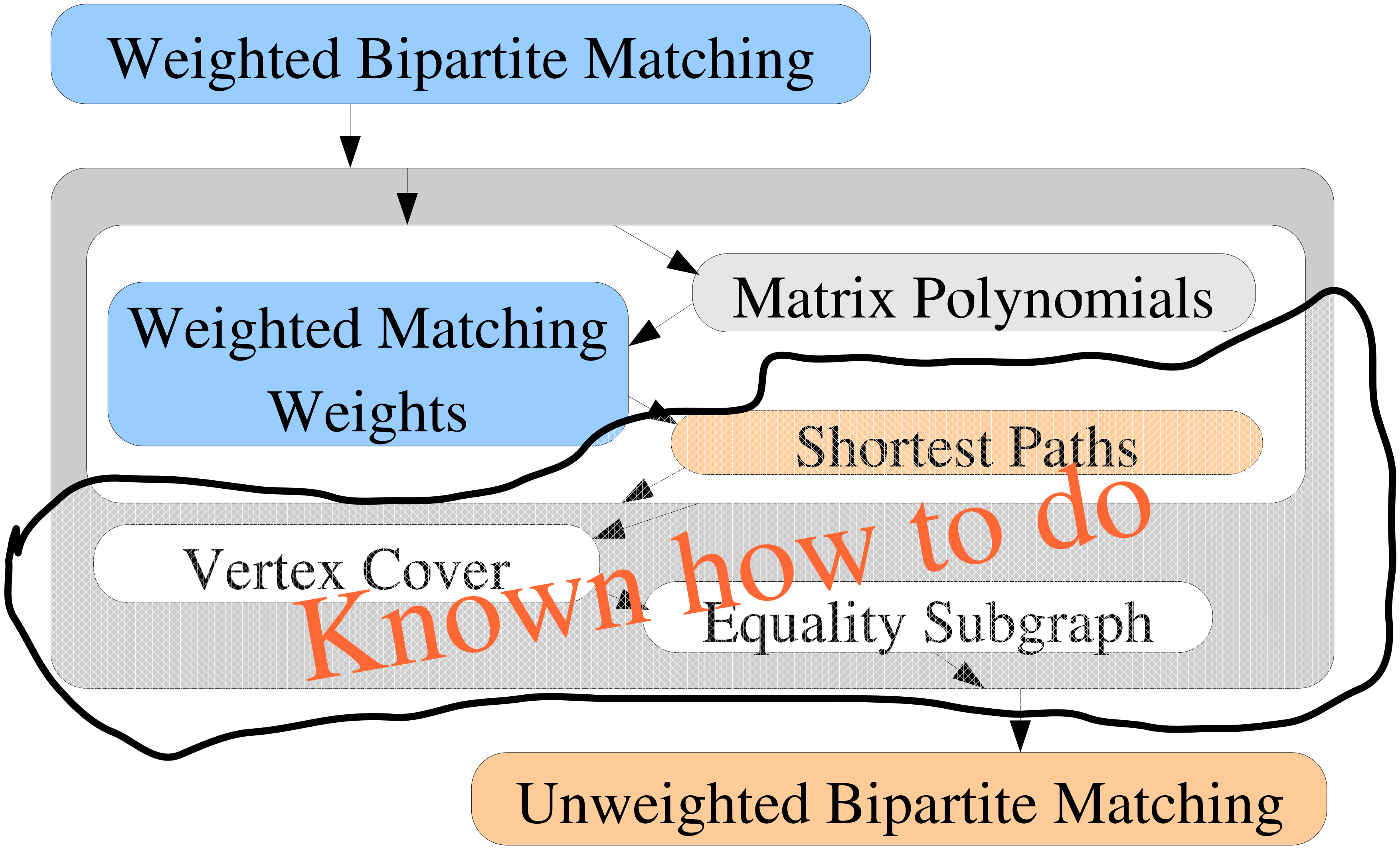
Weighted Matching
Weighted Matching
Shortest Paths
Vertex Cover
Equality Subgraph
Unweighted Matching

Idea



Weighted Matching
Matrix Polynomials
Weighted Matching
Weights
Shortest Paths
Vertex Cover
Equality Subgraph
Unweighted Matching

Bipartite Case



Kilka definicji

Ważony n-wierzchołkowy graf dwudzielny G to czwórka $G = (U, V, E, w)$ taka, że

- $U = \{1, \ldots, n\}$ and $V = \{n+1, \ldots, 2n\}$ oznaczają zbiory wierzchołków,
- $E \subseteq U \times V$ oznacza zbiór krawędzi,
- funkcja $w : E \longrightarrow \mathcal{Z}_+$ przypisuje wagi krawędziom.

Kilka definicji

W *problemie maksymalnych skojarzeń* w grafach dwudzielnych szukamy

- doskonałego skojarzenia M w ważonym grafie G,
- o maksymalnej całkowitej wadze $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$.

Kilka definicji

W *problemie maksymalnych skojarzeń* w grafach dwudzielnych szukamy

- doskonałego skojarzenia M w ważonym grafie G,
- o maksymalnej całkowitej wadze $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$.

Rozmiar problemu jest zadany przez n oraz W — maksymalną wagę w w.

Kilka definicji

Ważone pokrycie to $y(1), \ldots, y(2n)$ takie, że

$$y(i) + y(j) \geq w(ij),$$

dla każdego $ij \in E$.

Kilka definicji

Ważone pokrycie to $y(1), \ldots, y(2n)$ takie, że

$$y(i) + y(j) \geq w(ij),$$

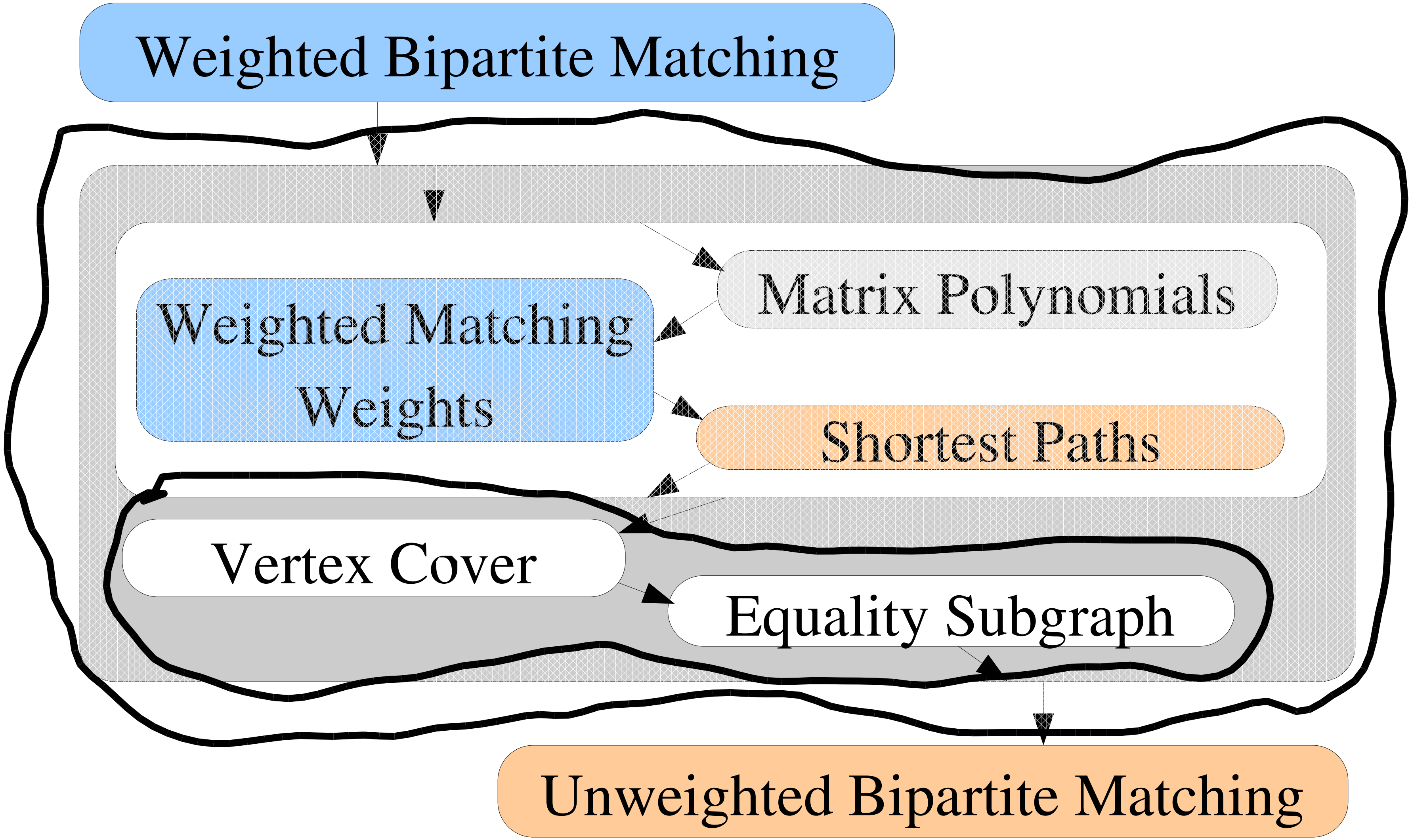
dla każdego $ij \in E$.

Problem minimalnego pokrycia wierzchołkowego polega na znalezieniu pokrycia o minimalnym koszcie.

Twierdzenie Egerváriego

Twierdzenie 9 (Egerváry '31)
Niech $G = (U, V, E, w)$ *będzie ważonym grafem dwudzielnym.*
wtedy waga maksymalnego doskonałego skojarzenia w G *jest równa wadze minimalnego pokrycie wierzchołkowego w* G.

Od pokrycia do skojarzeń



Od pokrycia do skojarzeń

Graf równościowy G_p dla p i G jest zdefiniowany jako

- $G_p = (U, V, E')$,
- $E' = \{uv : uv \in E \text{ and } p(u) + p(v) = w(uv)\}$.

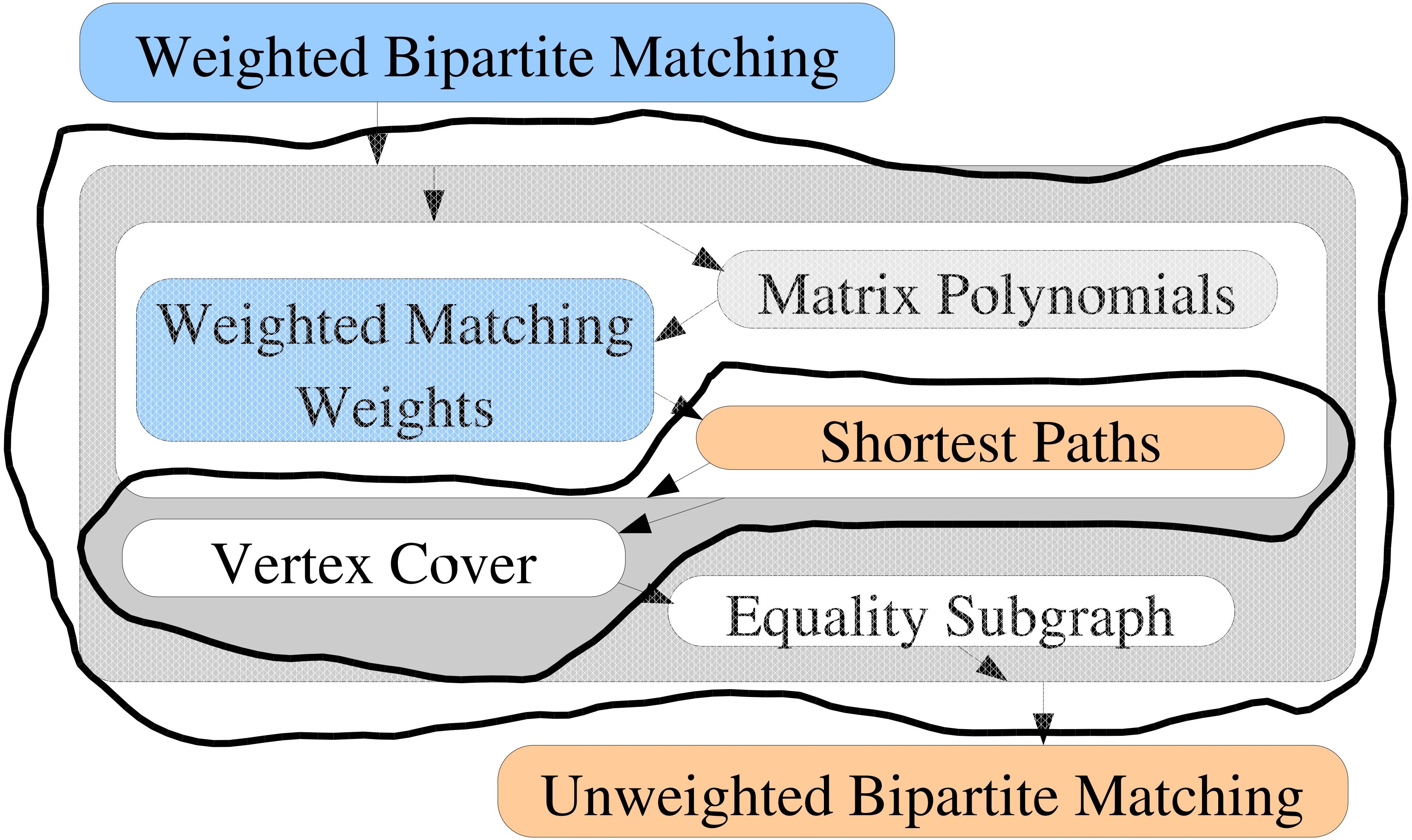
Od pokrycia do skojarzeń

Graf równościowy G_p dla p i G jest zdefiniowany jako

- $G_p = (U, V, E')$,
- $E' = \{uv : uv \in E \text{ and } p(u) + p(v) = w(uv)\}$.

Lemat 10
Rozważmy ważony graf dwudzielny G i minimalne pokrycie p w G.
Skojarzenie M jest doskonałym skojarzeniem w G_p wttw jeżeli jest maksymalnym doskonałym skojarzeniem w G.

Od ścieżek do pokrycia



Od ścieżek do pokrycia

Niech M będzie maksymalnym skojarzeniem w ważonym dwudzielnym grafie $G = (U, V, E, w)$.

1. skonstruuj skierowany ważony graf $D = (U \cup V \cup \{r\}, A, w_d)$,
2. dla każdego $uv \in E$, $u \in U$ i $v \in V$, dodaj krawędź (u, v) do A, $w_d((u, v)) := -w(uv)$,
3. dla każdego $uv \in M$, $u \in U$ i $v \in V$, dodaj krawędź (v, u) to A, $w_d((v, u)) := w_{uv}$,

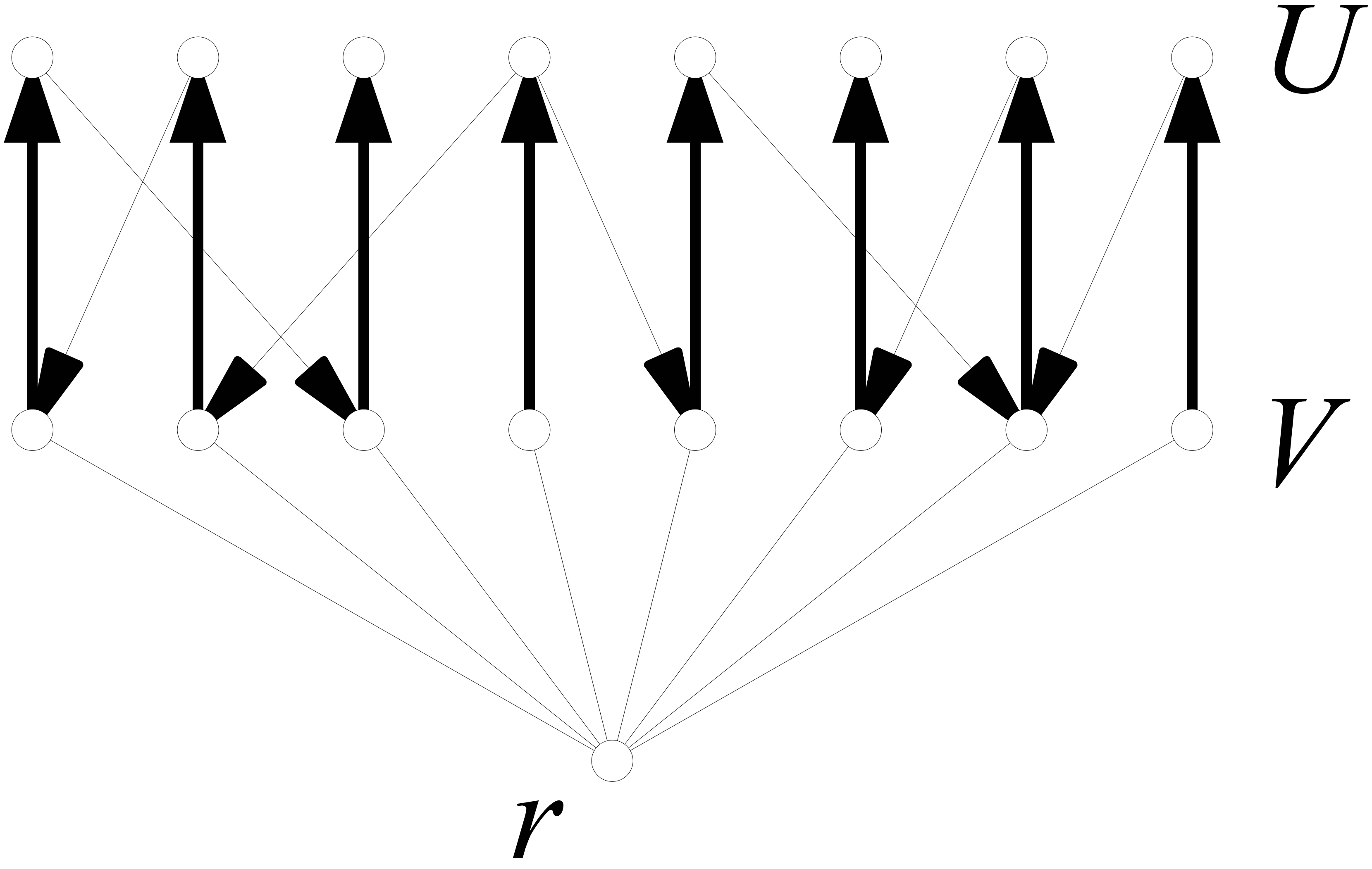
Od ścieżek do pokrycia

Niech M będzie maksymalnym skojarzeniem w ważonym dwudzielnym grafie $G = (U, V, E, w)$.

1. skonstruuj skierowany ważony graf $D = (U \cup V \cup \{r\}, A, w_d)$,
2. dla każdego $uv \in E$, $u \in U$ i $v \in V$, dodaj krawędź (u, v) do A, $w_d((u, v)) := -w(uv)$,
3. dla każdego $uv \in M$, $u \in U$ i $v \in V$, dodaj krawędź (v, u) to A, $w_d((v, u)) := w_{uv}$,

W D nie ma ujemnych cykli.

Od ścieżek do pokrycia



Od ścieżek do pokrycia

1. dodamy krawędzie o zerowej wadze (r, v) dla każdego $v \in V$,
2. obliczmy odległości w D od r,
3. niech $y_u := \text{dist}(r, u)$ dla $u \in U$,
4. niech $y_v := -\text{dist}(r, v)$ dla $v \in V$.

Od ścieżek do pokrycia

1. dodamy krawędzie o zerowej wadze (r, v) dla każdego $v \in V$,
2. obliczmy odległości w D od r,
3. niech $y_u := \mathrm{dist}(r, u)$ dla $u \in U$,
4. niech $y_v := -\mathrm{dist}(r, v)$ dla $v \in V$.

Lemat 11 *Znalezione y to minimalne pokrycie grafu G.*

Od ścieżek do pokrycia

$\mathrm{dist}(r, u)$ jest funkcją potencjału

$$w_d((u, v)) \geq \mathrm{dist}(r, v) - \mathrm{dist}(r, u)$$

Od ścieżek do pokrycia

$\mathrm{dist}(r,u)$ jest funkcją potencjału

$$w_d((u,v)) \geq \mathrm{dist}(r,v) - \mathrm{dist}(r,u)$$

Dla $uv \in E$ mamy krawędź (u,v) w D i

$$w_d((u,v)) \geq \mathrm{dist}(r,v) - \mathrm{dist}(r,u),$$

$$-w(uv) \geq -y(v) - y(u).$$

$$w(uv) \leq y(v) + y(u).$$

Czyli y jest pokryciem.

Od ścierzek do pokrycia

$\text{dist}(r, u)$ jest funkcją potencjału

$$w_d((u, v)) \geq \text{dist}(r, v) - \text{dist}(r, u)$$

Od ścierzek do pokrycia

$\mathrm{dist}(r,u)$ jest funkcją potencjału

$$w_d((u,v)) \geq \mathrm{dist}(r,v) - \mathrm{dist}(r,u)$$

Dla $uv \in M$ mamy krawędź (v,u) w D i

$$w_d((v,u)) \geq \mathrm{dist}(r,u) - \mathrm{dist}(r,v),$$

$$w(uv) \geq y(u) + y(v).$$

Sumując tą nierówność dla krawędzi w M otrzymujemy $w(y) \leq w(M)$.

Od ścierzek do pokrycia

$\text{dist}(r,u)$ jest funkcją potencjału

$$w_d((u,v)) \geq \text{dist}(r,v) - \text{dist}(r,u)$$

Dla $uv \in M$ mamy krawędź (v,u) w D i

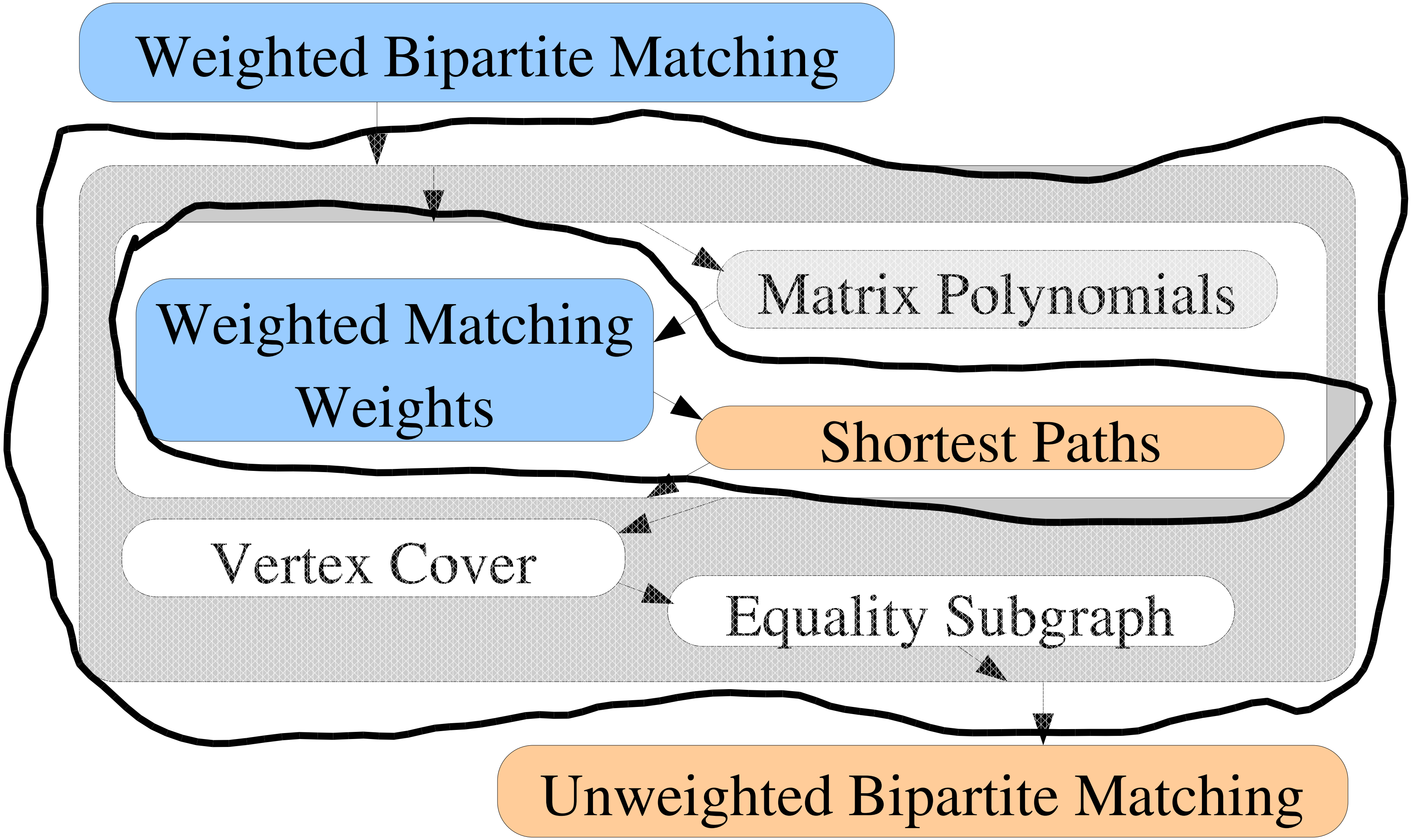
$$w_d((v,u)) \geq \text{dist}(r,u) - \text{dist}(r,v),$$

$$w(uv) \geq y(u) + y(v).$$

Sumując tą nierówność dla krawędzi w M otrzymujemy $w(y) \leq w(M)$.

Czyli y jest minimalne.

Od wag skojarzeń do ścieżek



Od wag skojarzeń do ścieżek

Rozważmy ważony graf dwudzielny $G = (U, V, E, w)$.

Od wag skojarzeń do ścieżek

Rozważmy ważony graf dwudzielny $G = (U, V, E, w)$.

- dodajmy wierzchołek s do U,

Od wag skojarzeń do ścieżek

Rozważmy ważony graf dwudzielny $G = (U, V, E, w)$.

- dodajmy wierzchołek s do U,
- dodajmy wierzchołek t do V,

Od wag skojarzeń do ścieżek

Rozważmy ważony graf dwudzielny $G = (U, V, E, w)$.

- dodajmy wierzchołek s do U,
- dodajmy wierzchołek t do V,
- połączmy s z wszystkimi wierzchołkami z V krawędziami o wadze zero,

Od wag skojarzeń do ścieżek

Rozważmy ważony graf dwudzielny $G = (U, V, E, w)$.

- dodajmy wierzchołek s do U,
- dodajmy wierzchołek t do V,
- połączmy s z wszystkimi wierzchołkami z V krawędziami o wadze zero,
- połączmy t z wierzchołkiem u w U.

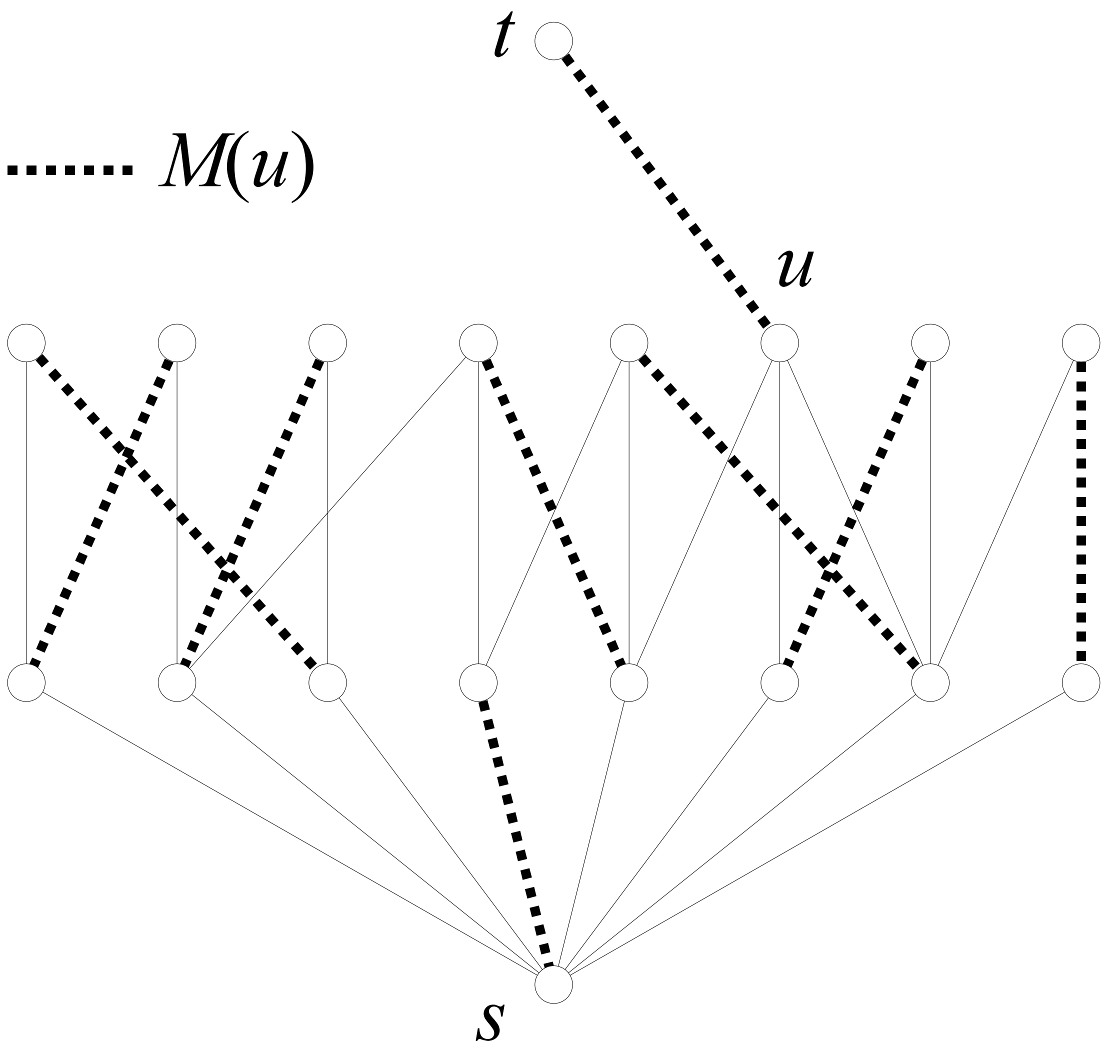
Od wag skojarzeń do ścieżek

Rozważmy ważony graf dwudzielny $G = (U, V, E, w)$.

- dodajmy wierzchołek s do U,
- dodajmy wierzchołek t do V,
- połączmy s z wszystkimi wierzchołkami z V krawędziami o wadze zero,
- połączmy t z wierzchołkiem u w U.

Oznaczmy przez $G(u)$ otrzymany graf, a przez $M(u)$ maksymalne ważone skojarzenie w $G(u)$.

Od wag skojarzeń do ścieżek



Od wag skojarzeń do ścieżek

Lemat 12 *Odległości w D spełniają*

$$\mathrm{dist}(r, u) := w(M) - w(M(u)) \text{ for } u \in U.$$

Od wag skojarzeń do ścieżek

Lemat 12 *Odległości w D spełniają*

$$\mathrm{dist}(r, u) := w(M) - w(M(u)) \text{ for } u \in U.$$

Rozważmy skojarzenia $M(u)$ i M,

Od wag skojarzeń do ścieżek

Lemat 12 *Odległości w D spełniają*

$$\mathrm{dist}(r,u) := w(M) - w(M(u)) \text{ for } u \in U.$$

Rozważmy skojarzenia $M(u)$ i M,

- skierujmy wszystkie krawędzie w M od V do U,

Od wag skojarzeń do ścieżek

Lemat 12 *Odległości w D spełniają*

$$\mathrm{dist}(r,u) := w(M) - w(M(u)) \text{ for } u \in U.$$

Rozważmy skojarzenia $M(u)$ i M,

- skierujmy wszystkie krawędzie w M od V do U,
- skierujmy wszystkie krawędzie w $M(u)$ od U do V,

Od wag skojarzeń do ścieżek

Lemat 12 *Odległości w D spełniają*

$$\mathrm{dist}(r,u) := w(M) - w(M(u)) \text{ for } u \in U.$$

Rozważmy skojarzenia $M(u)$ i M,

- skierujmy wszystkie krawędzie w M od V do U,
- skierujmy wszystkie krawędzie w $M(u)$ od U do V,
- otrzymujemy skierowaną ścieżkę p od s do t w D,

Od wag skojarzeń do ścieżek

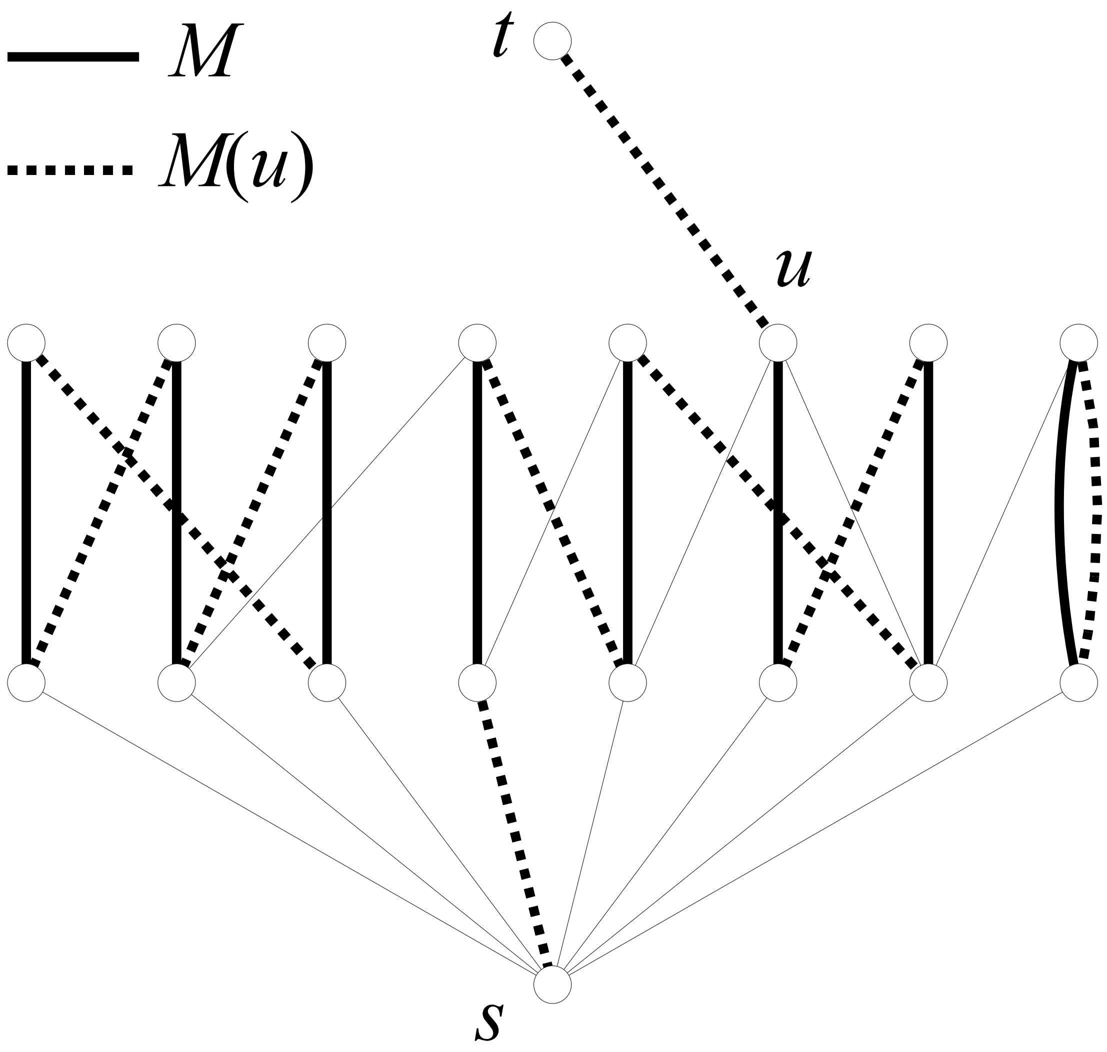
Lemat 12 *Odległości w D spełniają*

$$\mathrm{dist}(r, u) := w(M) - w(M(u)) \text{ for } u \in U.$$

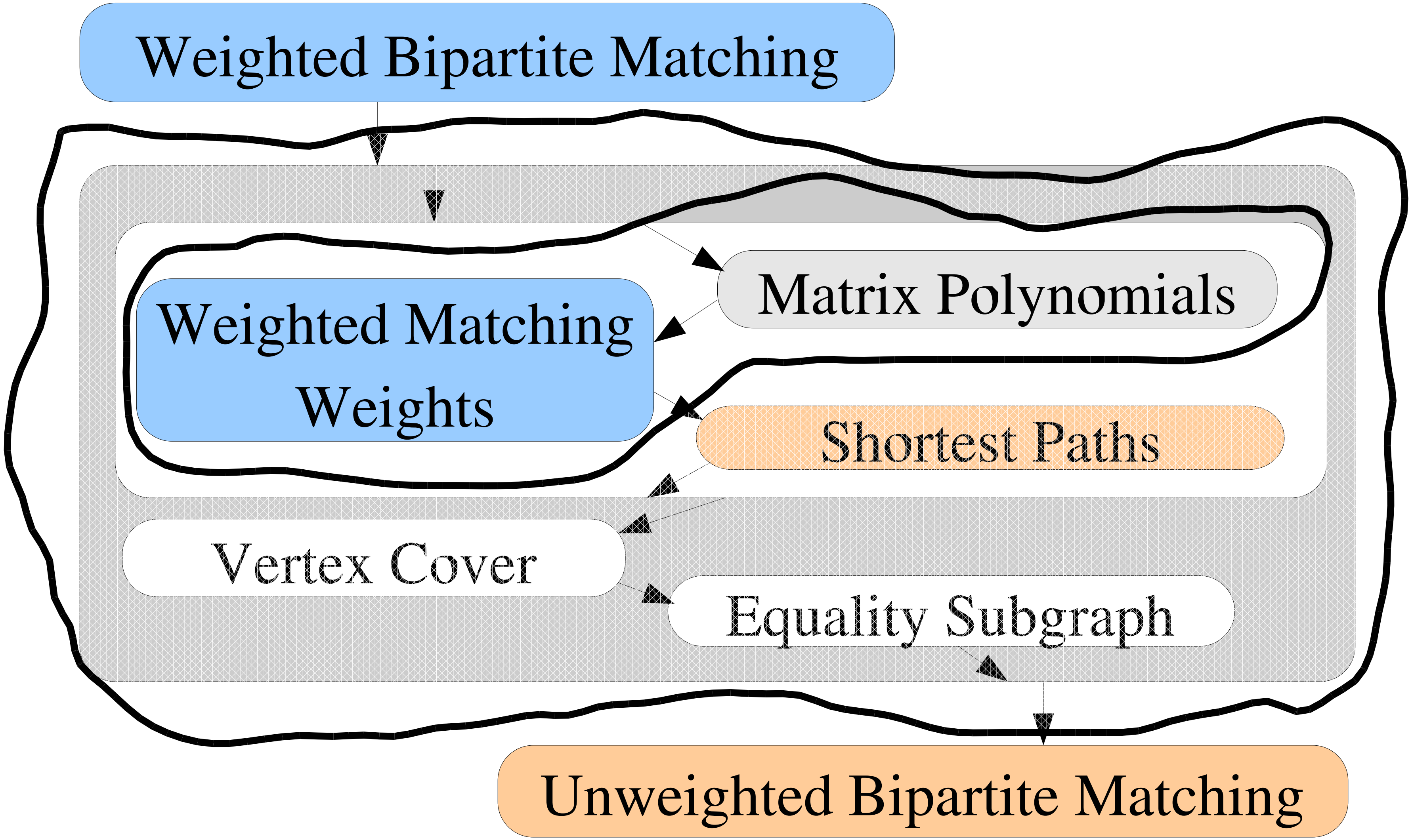
Rozważmy skojarzenia $M(u)$ i M,

- skierujmy wszystkie krawędzie w M od V do U,
- skierujmy wszystkie krawędzie w $M(u)$ od U do V,
- otrzymujemy skierowaną ścieżkę p od s do t w D,
- i zbiór $\mathcal{C}$ cykli alternujących.

Od wag skojarzeń do ścieżek



Od macierzy do wag skojarzeń



Od macierzy do wag skojarzeń

Dla $G = (U, V, E, w)$, zdefiniujmy macierz $\tilde{B}(G, x)$ rozmiaru $n \times n$ jako

$$\tilde{B}(G, x)_{i,j} = x^{w(ij)} z_{i,j},$$

gdzie $z_{i,j}$ to różne zmienne dla każdej krawędzi w G.

Od macierzy do wag skojarzeń

Dla $G = (U, V, E, w)$, zdefiniujmy macierz $\tilde{B}(G, x)$ rozmiaru $n \times n$ jako

$$\tilde{B}(G, x)_{i,j} = x^{w(ij)} z_{i,j},$$

gdzie $z_{i,j}$ to różne zmienne dla każdej krawędzi w G.

Lemat 13 (Karp, Upfal i Wigderson '86)
Stopień x w $\det(\tilde{B}(G, x))$ to waga maksymalnego ważonego doskonałego skojarzenia w G.

Zippel-Schwartz

Lemat 14 *Niech* $p(x_1, \ldots, x_m)$ *będzie niezerowym wielomianem stopnia* d *o współczynnikach z ciała oraz niech* S *będzie podzbiorem tego ciała, wtedy prawdopodobieństwo że* p *przyjmie wartość* 0 *na losowym elemencie* $(s_1, s_2, \ldots, s_m) \in S^m$ *wynosi co najwyżej* $d/|S|$. *Takie wydarzenie będziemy nazywać fałszywym zerem.*

Zippel-Schwartz

Lemat 14 *Niech $p(x_1, \ldots, x_m)$ będzie niezerowym wielomianem stopnia d o współczynnikach z ciała oraz niech S będzie podzbiorem tego ciała, wtedy prawdopodobieństwo że p przyjmie wartość 0 na losowym elemencie $(s_1, s_2, \ldots, s_m) \in S^m$ wynosi co najwyżej $d/|S|$. Takie wydarzenie będziemy nazywać fałszywym zerem.*

Jeżeli wielomian stopnia n jest obliczony dla losowych wartości modulo liczba pierwsza p o długości $(1+c)\log n$, to prawdopodobieństwo fałszywego zera jest mniejsze niż $\frac{1}{n^c}$, dla $c > 0$.

Od macierzy do wag skojarzeń

Twierdzenie 15 (Storjohann ’03)
Niech $A \in K[x]^{n\times n}$ *będzie macierzą wielomianów stopnia* d*, a* $b \in K[x]^{n\times 1}$ *będzie wektorem wielomianów stopnia także* d*, wtedy*

- *wyznacznik* $\det(A)$*,*
- *rozwiązanie układu równań* $A^{-1}b$*,*

może zostać obliczone z użyciem $\tilde{O}(n^{\omega}d)$ *operacji w* K*.*

Od macierzy do wag skojarzeń

Twierdzenie 15 (Storjohann '03)
Niech $A \in K[x]^{n \times n}$ będzie macierzą wielomianów stopnia d, a $b \in K[x]^{n \times 1}$ będzie wektorem wielomianów stopnia także d, wtedy

- *wyznacznik* $\det(A)$,
- *rozwiązanie układu równań* $A^{-1}b$,

może zostać obliczone z użyciem $\tilde{O}(n^\omega d)$ operacji w K.

Wniosek 16 *Waga maksymalnego doskonałego skojarzenia w grafie dwudzielnym może zostać policzona w czasie $\tilde{O}(Wn^\omega)$, z dużym prawdopodobieństwem.*

Od macierzy do wag skojarzeń

Zdefiniujmy macierz $\hat{B}(G,x)$ rozmiaru $(n+1)\times(n+1)$ przez

$$\hat{B}(G,x) = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \tilde{B}(G,x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Od macierzy do wag skojarzeń

Zdefiniujmy macierz $\hat{B}(G,x)$ rozmiaru $(n+1)\times(n+1)$ przez

$$\hat{B}(G,x) = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \tilde{B}(G,x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Mamy wtedy

$$\operatorname{adj}(\hat{B}(G,x))_{n+1,i}) = \det(\hat{B}(G,x)^{i,n+1})) =$$

gdzie $A^{i,j}$ to A bez i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Od macierzy do wag skojarzeń

Mamy

$$\mathrm{adj}(\hat{B}(G,x))_{n+1,i}) = \det(\hat{B}(G,x)^{i,n+1})) =$$

$$= \det(\tilde{B}(G(i),x)),$$

Od macierzy do wag skojarzeń

Mamy

$$\operatorname{adj}(\hat{B}(G,x))_{n+1,i}) = \det(\hat{B}(G,x)^{i,n+1})) =$$
$$= \det(\tilde{B}(G(i),x)),$$

Z lematu KUW otrzymujemy

$$\deg_x(\operatorname{adj}(\hat{B}(G,x))_{n+1,i})) = w(M(i)).$$

Od macierzy do wag skojarzeń

Wybierz liczbę pierwszą p długości $\Theta(\log n)$. Podstaw losowe wartości ze zbioru $\{1, \ldots, p\}$ za zmienne $z_{i,j}$ w $\hat{B}(G, x)$ aby otrzymać $B(x)$.

Od macierzy do wag skojarzeń

Wybierz liczbę pierwszą p długości $\Theta(\log n)$. Podstaw losowe wartości ze zbioru $\{1, \ldots, p\}$ za zmienne $z_{i,j}$ w $\hat{B}(G, x)$ aby otrzymać $B(x)$.

Oblicz używając twierdzenia Storjohanna

$$v = \mathrm{adj}(B(x))_{n+1,i}) = (\mathrm{adj}(B(x))e_{n+1})_i =$$

$$= \det(B(x)) \left(B(x)^{-1}e_{n+1}\right)_i$$

Od macierzy do wag skojarzeń

Wybierz liczbę pierwszą p długości $\Theta(\log n)$. Podstaw losowe wartości ze zbioru $\{1, \ldots, p\}$ za zmienne $z_{i,j}$ w $\hat{B}(G, x)$ aby otrzymać $B(x)$.

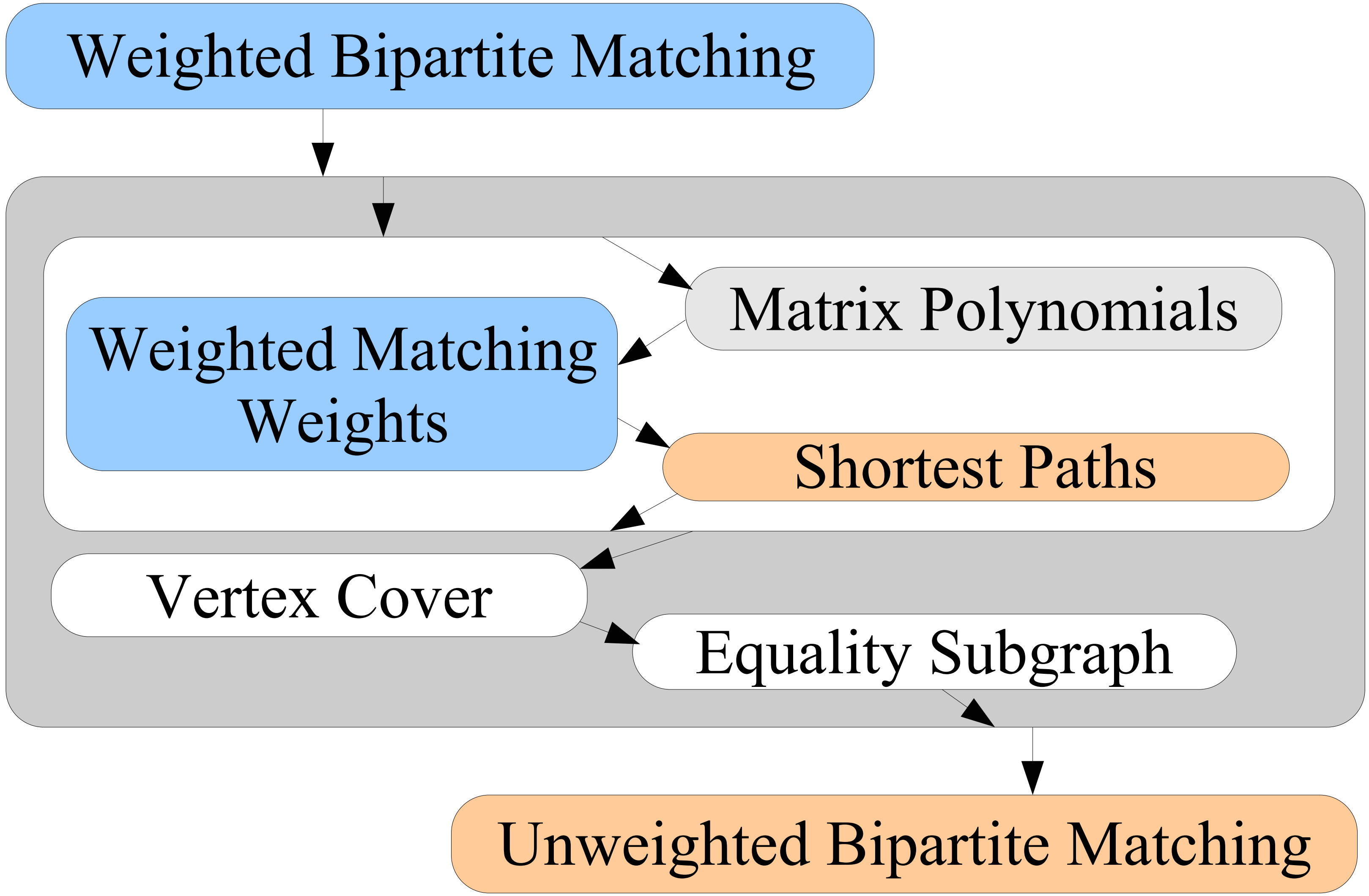
Oblicz używając twierdzenia Storjohanna

$$v = \mathrm{adj}(B(x))_{n+1,i}) = (\mathrm{adj}(B(x))e_{n+1})_i =$$

$$= \det(B(x)) \left(B(x)^{-1}e_{n+1}\right)_i$$

Z dużym prawdopodobieństwem $\deg_x(v_i) = w(M(i))$.

Ważone dwudzielne skojarzenia



Summary

Pokazaliśmy

- algorytm działający w czasie $\tilde{O}(Wn^{\omega})$ dla problemu minimalnego pokrycia wierzchołkowego w grafie dwudzielnym.
- algorytm działający w czasie $\tilde{O}(Wn^{\omega})$ dla problemu maksymalnych ważonych skojarzeń w grafie dwudzielnym.

Maksymalne skojarzenia przy pomocy eliminacji Gaussa

Piotr Sankowski

Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski