Skojarzenia ważone w grafach dowolnych

Piotr Sankowski

Plan

- Algorytm Edmondsa dla ważonych skojarzeń,

Algorytm Edmondsa bez wag

Lemma 1 (O ściąganiu cykli) *Dla grafu* G *niech,*

- M *będzie skojarzeniem w* G*,*
- Z *będzie cyklem długości* $2k+1$ *zawierającym* k *krawędzi z* M *i rozłącznym z resztą* M*.*

Skonstruujmy nowy graf G' *z* G *poprzez ściągnięcie* Z *do jednego wierzchołka. Wtedy* $M' = M - E(Z)$ *jest maksymalnym skojarzeniem w* G' *wttw gdy* M *jest maksymalnym skojarzeniem w* G*.*

Taki cykl nazywamy *kielichem*.

Algorytm Edmondsa

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem oraz niech $w : E \to \mathcal{R}$ będzie funkcją wagową.

Niech $\delta(U)$ oznacza zbiór krawędzi między U i $V - U$.

Kolekcja zbiorów Ω jest warstwowa gdy dla $U, V \in \Omega$ zachodzi $U \subset V$, bądź $V \subset U$, bądź $V \cap U = \emptyset$.

Algorytm Edmondsa

Chcemy znaleźć doskonałe skojarzenie M o najmniejszej wadze $w(M)$.

Będziemy konstruować razem ze skojarzeniem warstwową kolekcję Ω podzbiorów V nieparzystej liczności oraz funkcję $\pi : \Omega \to \mathcal{R}$ spełniającą:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \pi(U) \geq 0 & \text{jeżeli } U \in \Omega \text{ oraz } |U| \geq 3 \\ \text{(ii)} & \displaystyle\sum_{U \in \Omega,\ e \in \delta(U)} \pi(U) \leq w(e) & \text{dla każdego } e \in E. \end{array}$$

Algorytm Edmondsa

Z warunków tych wynika, że

$$w(M) \geq \sum_{U \in \Omega} \pi(U)$$

dla doskonałego skojarzenia M w G, gdyż

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M} \sum_{U \in \Omega,\ e \in \delta(U)} \pi(U) =$$

$$= \sum_{U \in \Omega} \pi(U) |M \cap \delta(U)| \geq \sum_{U \in \Omega} \pi(U).$$

M jest doskonałym skojarzeniem o najmniejszej wadze jeżeli zachodzi równość.

Algorytm Edmondsa

Dla Ω oraz $\pi : \Omega \to \mathcal{R}$ oraz krawędzi e definiujemy:

$$w_\pi(e) := w(e) - \sum_{U \in \Omega,\ e \in \delta(U)} \pi(U).$$

Z warunku (ii) wynika, że $w_\pi(e) \geq 0$ dla każdego $e \in E$.

Niech E_π oznacza zbiór krawędzi e dla których $w_\pi(e) = 0$ oraz niech $G_\pi = (V, E_\pi)$.

Algorytm Edmondsa

W czasie działania algorytmu będzie zachodzić $\{v\} \in \Omega$ dla każdego $v \in V$.

Ponieważ Ω jest warstwowy, to kolekcja Ω^{max} maksymalnych w sensie zawierania zbiorów Ω tworzy podział V.

Przez G' oznaczać będziemy graf otrzymany z G_π poprzez ściągnięcie do wierzchołków zbiorów z Ω^{max}:

$$G' := G_\pi / \Omega^{max}.$$

Algorytm Edmondsa

Zbiór wierzchołków G' to Ω^{max}. Dwa wierzchołki $U, U' \in \Omega^{max}$ są sąsiednie wtw gdy G_π zawiera krawędź łączącą U i U'. Krawędzie w grafie G' utożsamiamy z krawędziami w G.

Dla $U \in \Omega$ gdy $|U| \geq 3$, oznaczamy przez H_U graf otrzymany z $G_\pi[U]$ (podgraf G_π indukowany przez U) poprzez ściągnięcie maksymalnych w sensie zawierania podzbiorów U należących do Ω.

Algorytm Edmondsa

W algorytmie utrzymujemy:

- warstwową kolekcję podzbiorów V,
- funkcję $\pi : \Omega \to \mathcal{N}$ spełniającą (i) i (ii),
- skojarzenie M w G',
- dla każdego $U \in \Omega$, $|U| \geq 3$, cykl Hamiltona C_U w H_U,
- będziemy gwarantować, że wszystkie krawędzie M oraz C_U są ciasne względem π.

Zakładamy także, że G jest proste i ma doskonałe skojarzenie.

Algorytm Edmondsa

Na początku:

- $\Omega := \{\{v\} | v \in V\}$,
- $\pi(\{v\}) := 0$,
- $M = \emptyset$.

Niech X będzie zbiorem wierzchołków G' niekojarzonych przez M.

Algorytm Edmondsa

(1) G′ zawiera M-alternującą ścieżkę (niekoniecznie prostą) z X do X zerowej długości względem w_π.

- Jeżeli P jest ścieżką prostą to jest to ścieżka powiększająca względem M, niech $M := M \oplus P$.
- Jeżeli P nie jest ścieżką to zawiera kielich. Niech C będzie jego cyklem. Dodajmy $V(C)$ do Ω ustalmy $\pi(V(C)) := 0$, $M := M - E(C)$, oraz $C_{V(C)} := C$.

Algorytm Edmondsa

(2) G' nie zawiera alternującej ścieżki X-X.

- Niech $\mathcal{S}$ ($\mathcal{T}$) to wierzchołki G' do których istnieje alternujący spacer $X - U$ nieparzystej (parzystej) długości.
- Niech $\pi(U) := \pi(U) + \alpha$ jeżeli $U \in \mathcal{T}$, oraz niech $\pi(U) := \pi(U) - \alpha$ jeżeli $U \in \mathcal{S}$, gdzie α to największa wartość zachowująca (i) i (ii).
- Jeżeli po tej zmianie dla pewnego wierzchołka $U \in \mathcal{S}$ takiego, że $|U| \geq 0$ mamy $\pi(U) = 0$ to usuńmy U z Ω, rozszerzmy skojarzenie M doskonałym skojarzeniem w $C_U - v$, gdzie v to wierzchołek C_U skojarzony w M.

Algorytm Edmondsa

W przypadku **(2)** wartość α jest dobrze określona i niezerowa, ponieważ:

- $\sum_{U \in \Omega} \pi(U)$ jest skończone bo istnieje co najmniej jedno doskonałe skojarzenie,
- oraz $|T| > |S|$, gdy M nie jest doskonałym skojarzeniem.

Algorytm Edmondsa

Iteracja kończy się gdy M jest doskonałym skojarzeniem G', wtedy używając C_U powiększamy skojarzenie M do doskonałego skojarzenia N w G takiego, że

- $w_\pi(N) = 0$,
- $|N \cap \delta(U)| = 1$ dla każdego $U \in \Omega$.

Co daje równości w:

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M} \sum_{U \in \Omega,\, e \in \delta(U)} \pi(U) =$$

$$= \sum_{U \in \Omega} \pi(U) |M \cap \delta(U)| \geq \sum_{U \in \Omega} \pi(U).$$

Algorytm Edmondsa

Z tego że zbiór Ω jest warstwowy wynika, że

$$|\Omega| \leq 2|V|.$$

Korzystając z tego pokażemy, że

Lemma 2 *Algorytm wykona co najwyżej* $2|V|^2$ *iteracji.*

- Jest co najwyżej $\frac{1}{2}|V|$ powiększeń skojarzenia.
- Obserwacja: Żaden zbiór U dodany do Ω nie zostanie usunięty z Ω przed najbliższym powiększeniem skojarzenia.

Algorytm Edmondsa

- Po ściągnięciu U w grafie jest ścieżka alternująca parzystej długości z X do U.
- Do momentu powiększenia skojarzenia to się nie może zmienić, o ile U nie zostanie ściągnięte jeszcze raz w większym kielichu.
- Czyli U nie znajdzie sie w $\mathcal{S}$ przed powiększeniem skojarzenia.
- Operacji ściągnięcia i rozciągnięcia kielichów nie będzie więcej niż $2|V|$.

Algorytm Edmondsa

Jeżeli nie ściągamy kielicha w iteracji to

- istnieje krawędź e łącząca $U \in \mathcal{T}$ z wierzchołkiem $W \notin S$ dla której w_π zmienione zostało na 0.
- Jeżeli $W \notin \mathcal{T}$ to po zmianie π mamy $W \in \mathcal{S}$ liczba wierzchołków nie w $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ się zmniejszyli.
- Jeżeli $W \in \mathcal{T}$ to w następnym kroku zastosujemy przypadek **(1)**.
- A zatem liczba wykonań przypadku **(2)** bez wykonywania rozciągnięcia cyklu jest co najwyżej $|V|$.

Algorytm Edmondsa

Theorem 1 *Najlżejsze doskonałe skojarzenie może zostać znalezione w czasie* $O(n^2m)$.

Konstruując explicite lasy naprzemienne tak jak w algorytmie Edmondsa dla nieważonych skojarzeń możemy poprawić ten czas do:

Theorem 2 *Najlżejsze doskonałe skojarzenie może zostać znalezione w czasie* $O(n^3)$.