Twierdzenie Berge'a

Niech M będzie ~~maksymalnym~~ najliczniejszym skojarzeniem w $G=(V,E)$ wtedy

$$|M| = \min_{X \subseteq V} \frac{1}{2}\left(|V| - (c_0(G-X) - |X|)\right).$$

Twierdzenie Tutte

Graf zawiera doskonałe skojarzenie wtw gdy $c_0(G-X) \leq |X|$ dla wszystkich $X \subseteq V$.

~~Graf G jest~~

Pokażemy korzystny zbiór dla twierdzenia Tutte/Bergeu. Robiąc to otrzymamy wgląd w to jak wyglądają ~~maksymalne~~ najliczniejsze skojarzenia w grafie, np. jakie krawędzie rozcięć należą do takiego skojarzenia, a jakie wierzchołki należą zawsze itp.

Definicja:

Graf G jest <u>krytyczny</u> jeżeli dla każdego $v \in V(G)$ graf $G-v$ ma doskonałe skojarzenie.

Skojarzenie prawie doskonałe to skojarzenie w którym tylko jeden wierzchołek jest odsłonięty.

Niech $\mu(G)$ oznacza liczność najliczniejszego ~~maksymalnego~~ skojarzenia w G.

Twierdzenie o Kaleidoskopie Gallai-Edmondsa

Niech $D(G)$ - wierzchołki nie skojarzone w pewnym najliczniejszym ~~maksymalnym~~ skojarzeniu.

$A(G)$ - wierzchołki sąsiednie z $D(G)$

$C(G)$ - pozostałe wierzchołki

wszystkie na następnej kartce

a) Spójne składowe $D(G)$ są krytyczne,

b) jeżeli M jest najliczniejszym ~~maksymalnym~~ skojarzeniem w G, to zawiera prawie doskonałe skojarzenie składowych $D(G)$, doskonałe skojarzenie $C(G)$ oraz krawędzie rozpinające wierzchołki $A(G)$ z różnymi składowymi $D(G)$

c) rozmiar najliczniejszego ~~maksymalnego~~ skojarzenia to,

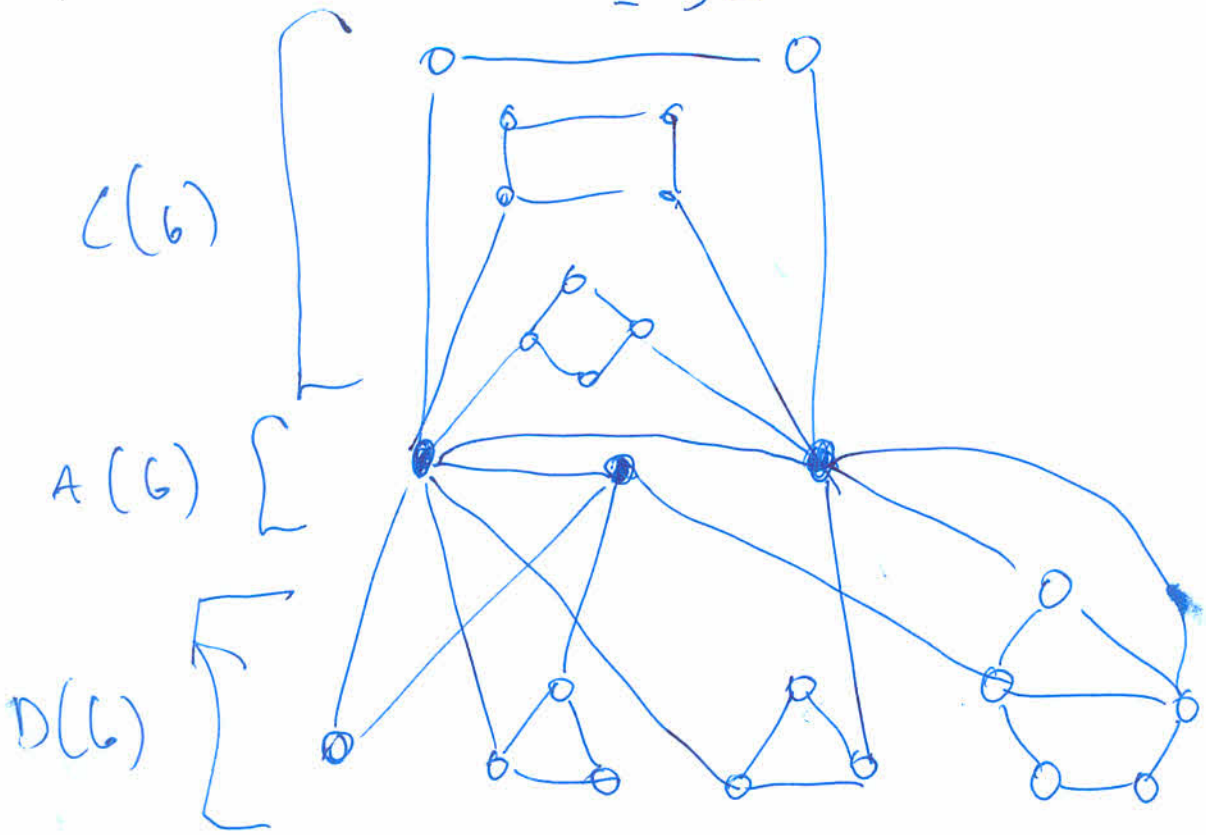
$$\mu(G) = \frac{1}{2}\left(|V| - c(D(G)) + |A(G)|\right)$$

gdzie $c(H)$ to liczba spójnych składowych H.

d) graf dwudzielny powstały z ~~wierzchołków~~ $C(G)$ G poprzez usunięcie wierzchołków z $C(G)$ i wszystkich rozpiętych przez $A(G)$ oraz poprzez ściągnięcie składowych $D(G)$ do pojedynczych wierzchołków ma nadrzędną potęgę od strony A.

Następnie omówiono, że $|X| < |N(X)|$ dla każdego $X \subseteq A$.

Z Twierdzenia Halla istnieje skojarzenie krawędzie wszystkie A.



Lemat O Stabilności:

Jeżeli $u \in A(G)$, to $A(G-u) = A(G) - u$, $C(G-u) = C(G)$ i $D(G-u) = D(G)$.

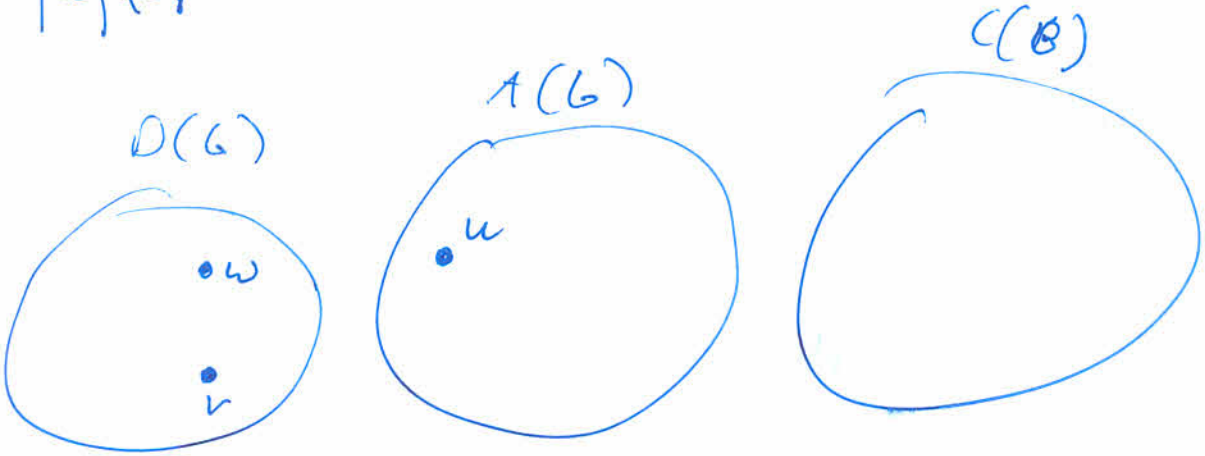
Dowód:

Pokażemy, że $D(G-u) = D(G)$. Wtedy $A(G-u) = A(G) - u$ bo $u \in A(G)$ i wierzchołki sąsiednie z $D(G)$ jest tylko mniej o u. A więc także $C(G-u) = C(G)$.

Niech M będzie ~~maksymalnym~~ największym skojarzeniem w G. Wtedy M pokrywa u, bo $u \notin D(G)$. Dlatego $\mu(G-u) = \mu(G) - 1$. Co więcej ~~jeżeli~~ $M-u$ jest ~~maksymalnym~~ największym skojarzeniem w $G-u$.

Najpierw pokażemy, że $D(G) \subseteq D(G-u)$. Weźmy dowolne $v \in D(G)$. Niech M_v będzie ~~najlicznejszym~~ najliczniejszym skojarzeniem w G nie kojarzącym v. Wtedy $M_v - u$ jest najliczniejszym skojarzeniem w $G-u$ oraz $M_v - u$ nie kojarzy też v, dlatego $v \in D(G-v)$ i $D(G) \subseteq D(G-u)$.

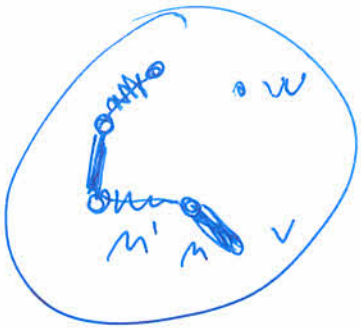
Aby pokazać $D(G-u) \subseteq D(G)$ weźmy wierzchołek $v \in D(G-u)$. Wtedy istnieje najliczniejsze skojarzenie M' w $G-u$ ~~nie~~ pomijające v. Niech w będzie dowolnym punktem w $D(G)$ sąsiednim do u w G oraz niech M będzie najliczniejszym skojarzeniem pomijającym w.



Jeżeli M pomija v to $v \in D(G)$,

Dlatego założmy że M pokrywa v.

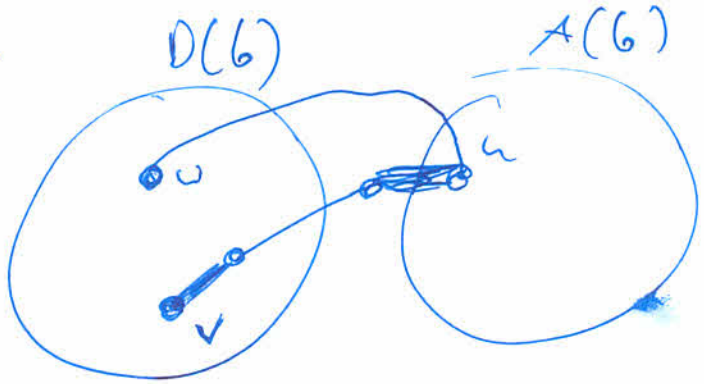
Rozważmy $M \cup M'$. Z definicji: M' pomija v, a M pokrywa v, dlatego składowa $M \cup M'$ zawierająca v musi być ścieżką P rozpoczynającą się krawędzią z $M - M'$.



Jeżeli P kończy się krawędzią z M', to różnica symetryczna M oraz P jest nowym skojarzeniem M'' w G które pomija v. Co więcej $|M''| = |M|$ a więc M'' jest najliczniejsze i pomija v, czyli $v \in D(G)$.

Rozważmy przypadek gdy P kończy się krawędzią z M. Utwórzmy jeszcze jedno skojarzenie M_3 poprzez wzięcie różnicy symetrycznej M' oraz P.

Wtedy $|M_3| > |M'|$ oraz $M_3 \not\subseteq E(G-u)$ a ~~maksymalno~~ bo M' było najliczniejsze w $G-u$. Jedyna możliwość jest taka że P kończy się w u.



Teraz różnica symetryczna M oraz $P + uw$ jest najliczniejszym skojarzeniem w G pomijającym $v \in D(G)$. ~~Lemat Gallai-Edmondsa~~

Dowód Twierdzenia o Rozkładzie Gallai-Edmondsa:

Uśrednijmy punkty z $A(G)$ po kolei.

Lemat o stabilności mówi nam, że w każdym kroku uśredniany punkt należy do zbioru A w aktualnym grafie, i:

$$\mu(G-A) = \mu(G) - |A|. \quad (*)$$

Co więcej:

$$C(G-A) = C(G) \text{ oraz } D(G-A) = D(G). \quad (**)$$

Jeżeli M jest najliczniejszym skojarzeniem w G to ~~wtedy~~ też $M \cap E(G-A)$ jest najliczniejszym skojarzeniem w $G-A$.

Niech $G_1, \ldots, G_t$ będą spójnymi składowymi grafu $G-A$ leżącymi w D. Ponieważ żadna krawędź nie łączy D z C, to te ~~[illegible]~~ składowe ~~[illegible]~~ są podziałem D. Niech H będzie podgrafem G indukowanym przez C.

Z (**) wiemy, że każde najliczniejsze skojarzenie w $G-A$ pokrywa H, ale każdy wierzchołek w D będzie wolny w pewnym skojarzeniu. Dlatego najliczniejsze skojarzenie w $G-A$ składa się z doskonałego skojarzenia H i ~~prawie doskonałych~~ pewnych skojarzeń M_i w każdym G_i. Dlatego H ma doskonałe skojarzenie ~~[illegible]~~ ~~dowodzi [illegible]~~.

Bardziej ~~z lematu Gallai~~ wiemy, że liczby wierzchołków w G_i jest parzysta przez skojarzenie tej samej liczności i dlatego G_i jest krytyczne, co dowodzi a).

Lemat Gallai:
~~Jeżeli~~ Jeżeli G jest spójny oraz $\mu(G-v) = \mu(G)$ dla każdego $v \in V(G)$ to wtedy G jest krytyczne.

~~(wskazówka)~~
Pokażemy teraz, że rozkładu b).
Ponieważ $M \cap E(G-A)$ jest najliczniejsze w $G-A$ to $M \cap E(H)$ jest doskonałe na H, ~~oraz $M \cap E(G_i)$ jest prawie doskonałe w G_i~~
oraz $M \cap E(G_i)$ jest prawie doskonałe w G_i.
Z (*) wiemy, że $|M \cap E(G-A)| = |M| - |A|$
dlatego M nie zawiera krawędzi wewnątrz A. Jednak M pokrywa każdy wierzchołek w A, ale

nie mają ich łączyć z C, dlatego wszystkie A są złączone z D.

~~Ponieważ z d) istnieje złączenie łączące wszystkie A ze składowymi D to najliczniejsze złączenie powstaje poprzez złączenie wierzchołków z A z różnymi składowymi D.~~

~~Ponieważ D są ~~łączyć~~ składowe~~

Ponieważ D są ~~łączyć~~ to ~~łącząc z wierzchołki z A z jedną składową z D otrzymujemy większe złączenie~~. Każde A jest złączone z inną składową D.

d) Aby pokazać d) potrzebujemy udowodnić, że każdy niepusty zbiór $X \subseteq A$ jest sąsiedni z co najmniej $|X|+1$ składowymi G_i (co dowodzi b)). Niech G_1 będzie składową sąsiednią z pewnym punktem w X (ponieważ każdy punkt z A jest sąsiedni z punktem w $D(G)$ to taka składowa istnieje). Niech u będzie wierzchołkiem G_1 oraz niech M będzie najliczniejszym złączeniem pomijającym u.

2 b) wiemy, że M bierze wierzchołki z X z różnych składowych G_i, co więcej ponieważ $M \cap E(G_h)$ jest prawie doskonałe na G_h, to wierzchołki z X są skojarzone ze składowymi różnymi od G_h. Dlatego razem z G_h jest conajmniej $|X|+1$ składowych G_i sąsiednich do X, co dowodzi d).

c) z (*) mamy

$$\nu(G) = \mu(G-A) + |A| \overset{z(6)}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \frac{|V(G_i)|-1}{2} + \frac{|C(G)|}{2} + |A| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|V(G)| - t + |A|\right)$$

$\square$

Dowód lematu Gallai

Weźmy $X \subseteq V(G)$ takie, że zachodzi równość w twierdzeniu Berge'a

$$|V(G)| - 2\mu(G) = c_0(G-X) - |X|$$

Jeżeli $X \neq \emptyset$ to weźmy $u \in X$ i wtedy

$$|V(G)| - 1 - 2\mu(G-u) \geq c_0((G-u)-(X-u)) - |X-u|.$$

$$|V(G)| - 1 - 2\mu(G-u) \geq c_0(G-X) - |X| + 1$$

$$|V(G)| - 1 - 2\mu(G-u) \geq |V(G)| - 2\mu(G) + 1$$

czyli $\cancel{|V(G)|} - 1 - 2\mu(G) \geq \cancel{-} 2\mu(G) + 1$

$$\mu(G) \geq \mu(G) + 1$$

Dlatego w twierdzeniu Berge'a równość może zachodzić tylko dla $X = \emptyset$ czyli

$$|V(G)| - 2\mu(G) = c_0(G) = 1.$$

Czyli $\mu(G) = \frac{|V(G)|-1}{2}$ i G ma prawie doskonałe skojarzenie, co więcej dla każdego v $\mu(G) = \mu(G-v)$ czyli G jest krytyczne.

Konsekwencje:

1) jeżeli G nie ma doskonałego skojarzenia, to każda krawędź sąsiednia z orientacją o $D(G)$ należy do pewnego do największego skojarzenia.

Niech $u \in D(G)$ oraz uv będzie krawędzią G. Z definicji: $D(G)$ istnieje największe skojarzenie M pomijające u. Dlatego z twierdzenia wiemy, że v jest w tym skojarzeniu. Dlatego $M - vw + uv$ jest szukanym skojarzeniem.

2). Żadna krawędź w $A(G)$ będąca między $A(G)$ i $C(G)$ należy do największego skojarzenia

3). Jeżeli G jest krytyczne to wtedy mamy przypadek zdegenerowany

$D(G) = V(G)$ $\quad A(G) = C(G) = \emptyset$.

4) Jeżeli G ma doskonałe skojarzenie to

$D(G) = A(G) = \emptyset$ $\quad C(G) = V(G)$.

5) Jeżeli G jest dwudzielny i ma nadwyżkę dla A to $A(G) = A$ $D(G) = B$.

Dla każdego $G - v^{th}$ istnieje skojarzenie A z $B - v$.

Rozkład Gallai-Edmondsa jest trywialny w trzech przypadkach 3, 4 i 5. Z drugiej strony mówi on nam, że każdy graf może być rozłożony na grafy jednego z tych 3 typów. ~~Aby~~ Dokładniej mówiąc mamy następującą konstrukcję.

Niech G_0 będzie multigrafem dwudzielnym na (U, W) z nadwyżką. Dla każdego $w \in W$ niech G_w będzie grafem krytycznym, oraz niech H będzie grafem z dostatecznym skojarzeniem. Dla tych grafów definiujemy ~~dowolny~~ wierzchołkowy graf G przez

$$V(G) = U \cup V(H) \cdot W \bigcup_{w \in W} V(G_w).$$

Niech do G należą wszystkie krawędzie H oraz G_w. Dla każdej krawędzi $uw \in E(G_0)$ $u \in U$ $w \in W$ dodaj krawędź łączącą u z dowolnym wierzchołkiem z G_w. Dodaj też dowolne krawędzie między ~~U~~ oraz $V(H)$ oraz wewnątrz U.

Twierdzenie: ~~Graf~~ G

Dla grafu G skonstruowanego w ten sposób mamy

$$A(G) = U$$
$$C(G) = V(H)$$
$$D(G) = \bigcup_{v \in W} V(G_v).$$

Każdy graf jest otrzymany z tej konstrukcji w sposób jednoznaczny.

Dowód:

W tym grafie mamy

$$\min_{X \subseteq V} \frac{1}{2}\left(|V| - (c_0(G-X) - |X|)\right) \leq \frac{1}{2}\left(|V| - (c_0(G-U) - |U|)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(|V| - (|W| - |U|)\right).$$

Z drugiej strony łatwo skonstruować skojarzenie o tej liczności.

Uzupełnienie rozkładu opisane w Twierdzeniu 6-E.

O przypadku grafów dwudzielnych rozkład $G-E$ można się uprościć.

Twierdzenie: Niech $G=(U_1, U_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym, wtedy oraz niech

$A_i = A \cap U_i$, $C_i = C \cap U_i$, oraz $D_i = D \cap U_i$

gdzie A, C, D są dane przez rozkład $G-E$.

Wtedy:

1) $D = D_1 \cup D_2$ jest niezależnym zbiorem punktów

2) podgraf $G(C_1 \cup C_2)$ ma doskonałe skojarzenie, a więc $|C_1| = |C_2|$.

3) $N(D_1) = A_2$ i $N(D_2) = A_1$

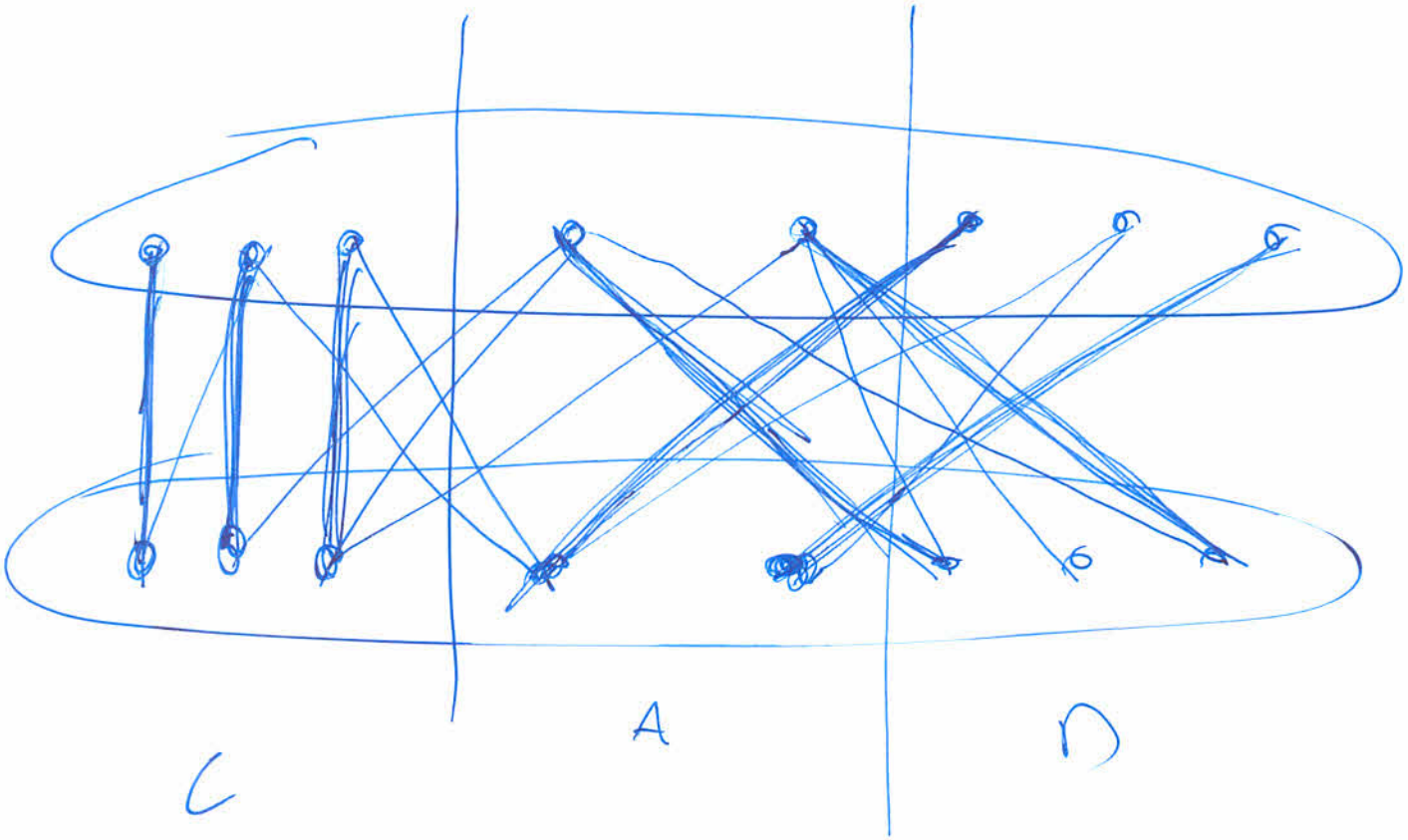
4) Każde najliczniejsze skojarzenie G zawiera doskonałe skojarzenie $G[C_1 \cup C_2]$ skojarzone A_1 z D_2 oraz A_2 z D_1.

5) jeżeli T jest minimalnym pokryciem wierzchołkowym to

$$A_1 \cup A_2 \subseteq T \subseteq A_1 \cup A_2 \cup C_1 \cup C_2.$$

6) $C_1 \cup A_1 \cup A_2$ oraz $C_2 \cup A_1 \cup A_2$ są najmniejszymi pokryciami.

7) Podgrafy indukowane przez $A_1 \cup D_2$ i $A_2 \cup D_1$ mają rozwiązanie.


C
A
D

Dowód:

Aby udowodnić 1) zauważmy, że grafy dwudzielne nie będące pseudolasami nie mają bazy krytycznej.

(2), (3), (4) wynikają wprost z $G-E$ i tego, że graf jest dwudzielny.

Aby udowodnić (5) załóżmy że $a \in A_1 - T$ wtedy istnieje ~~punkt~~ d sąsiadujący $d \in D$ taki, że krawędź ad należy do $E(G)$ a zatem $d \in T$. Co więcej może być tylko jedno d sąsiednie z a. Jeżeli byłoby ich więcej $\{d_1, \dots, d_r\} \subseteq N(a) \cap D$ to wtedy $T - \{d_1, \dots, d_r\} \cup \{a\}$ byłoby bazą mniejszym pokryciem.

Teraz niech M będzie najliczniejszym skojarzeniem w G nie zawierającym d. Wtedy M zawiera a oraz krawędzi $G[A_1 \cup A_2]$ co przeczy twierdzeniu $G-E$. Dlatego $A_1 \subseteq T$ podobnie $A_2 \subseteq T$.

Teraz załóżmy, że

$T \cap D \neq \emptyset$, czyli niech $d \in T \cap D$.

~~Wtedy~~ Bez straty ogólności niech $d \in D_2$.

Wtedy $N(d) \subseteq A_1 \subseteq T$. Dlatego

$T - \{d\}$ jest pokryciem G co przeczy

minimalności T. ~~Podobnie~~

(6) wynika z tego, że $\mu(G) = |C_1| + |A| =$

$= |C_1| + |A_1| + |A_2| = |C_2| + |A_1| + |A_2|$, ale

ponieważ są to pokrycia to muszą być

to minimalne pokrycia.

Aby udowodnić (7) załóżmy przez sprzeczność

że dla pewnego niepustego $X \subseteq A_1$

$|X| \geq |N(X) \cap D_2|$. Wtedy ~~$T = (A_1 - X) \cup$~~

$T = (A_1 - X) \cup (N(X) \cap D_2) \cup A_2 \cup C_1$ jest

pokryciem grafu G, oraz

$|T| \leq |A_1| + |A_2| + |C_1| = \mu(G)$ jest minimalne

ale nie rozłączni $A_1 \not\subseteq T$ co przeczy (5).