Egzamin z RPiS (część I - 45 minut), 24 stycznia 2012

Uwaga: Podpisz kartkę! Tam gdzie pytamy o uzasadnienie nie chodzi nam o formalny dowód, ale o krótki jedno/dwuzdaniowy argument. W takim przypadku uzasadnienie jest warte nie więcej niż połowę punktów.

Zadanie 1 (2 punkty). *Niech* $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ *oraz* $P(A|B) = P(B|C) = P(C|A) = \frac{2}{3}$. *Podaj przedział wartości jakie może przyjmować* $P(A \cap B \cap C)$*? Odpowiedź uzasadnij.*

Zadanie 2 (3 punkty). X *i* Y *są zmiennymi losowymi o wartościach nieujemnych. Wstaw w miejsce kropek znaki równości/nierówności w odpowiednią stronę, tam gdzie równość/nierówność zachodzi, lub słowo "NIE" jeśli nie zachodzi nierówność w żadną stronę.*

- $Var(X + Y) - VarX - VarY \ldots E(XY) - (EX)(EY)$;
- $Var(\min(X, Y)) \ldots \min(VarX, VarY)$;
- $E(\min(X, Y)) \ldots \min(EX, EY)$.

UWAGA 1: *Nie przyznajemy punktów za znak nierówności, jeśli zachodzi równość.*
UWAGA 2: *Za każdy punkt można otrzymać* 0.5 *pkt, ale nieprawidłowa odpowiedź to strata* 0.5 *pkt.*

Zadanie 3 (1.5 punkta). *Niech* $\Theta > 0$. *Czy funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *określona wzorem* $f(x) = \frac{\Theta}{2} e^{-\Theta|x|}$ *jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa? Odpowiedź uzasadnij.*

Zadanie 4 (2 punkt). *Niech* $X \sim Binom(2n, \frac{1}{2})$, $Y \sim Pois(n)$, X *i* Y *niezależne, i niech* $Z = X + Y$. *Jakie oszacowanie z góry prawdopodobieństwa* $P(Z \geq 3n)$ *dają nierówności Markowa i Czebyszewa?*

Zadanie 5 (1.5 punkta). *Niech n będzie liczbą naturalną większą od 0. Wpisz odpowiedzi TAK/NIE:*

1. *Jeśli $X \sim Binom(n, p)$ to $n - X$ ma rozkład dwumianowy;*
2. *Jeśli $X \sim N(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ to $n - X$ ma rozkład normalny;*
3. *Jeśli $X \sim Pois(\frac{n}{2})$ to $n - X$ ma rozkład Poissona.*

UWAGA: *Za każdy punkt można otrzymać 0.5 pkt, ale nieprawidłowa odpowiedź to strata 0.5 pkt.*

Zadanie 6 (2 punkty). *Jeśli $g_X(t)$ jest funkcją tworzącą zmiennej losowej X, to jak wygląda funkcja tworząca zmiennej $Y = X + 3$? To samo pytanie dla $Z = 2X$.*

Zadanie 7 (1 punkt). *Niech s i t będa komunikującymi się stanami łańcucha Markowa (tzn. są one wzajemnie osiągalne). Wpisz odpowiedzi TAK/NIE:*

1. *Jeśli s jest okresowy, to t też;*
2. *Jeśli s jest chwilowy, to t też;*

UWAGA: *Za każdy punkt można otrzymać 0.5 pkt, ale nieprawidłowa odpowiedź to strata 0.5 pkt.*

Zadanie 8 (2 punkty). *Liczba rozmów telefonicznych na dobę w helpdesku ma rozkład Poissona z nieznanym parametrem $\lambda > 0$. W ramach badań statystycznych zliczono rozmowy wykonane konkretnego dnia i okazało się, że była tylko jedna. Podaj funkcję wiarygodności odpowiadającą tej sytuacji. Jaką wartość parametru λ daje metoda największej wiarygodności? Odpowiedź uzasadnij.*