Egzamin z RPiS (część I - 30 minut), 1 lutego 2011

Uwaga: Tam gdzie pytamy o uzasadnienie nie chodzi nam o formalny dowód, ale o krótki jedno/dwuzdaniowy argument. W takim przypadku uzasadnienie jest warte nie więcej niż połowę punktów.

Zadanie 1 (1 punkt). *Jeśli* $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.2$ *i* $P(C) = 0.3$ *oraz* $P(B \cap C) > 0$, *to jakie wartosci moze przyjmowac* $P(A|B \cap C)$*? A jakie* $P(A \cap B|C)$ *?*

Zadanie 2 (3 punkty). *Wstaw znaki równości/nierówności, tam gdzie równość/nierówność zachodzi, lub słowo "NIE" jeśli nie zachodzi nierówność w żadną stronę.*

- $E(X^2) \ldots E(X)$,
- $E(X^2) \ldots (EX)^2$,
- $E(X^2) \ldots VarX$,
- $(EX)^2 \ldots VarX$.

UWAGA 1: *Nie przyznajemy punktów za znak nierówności, jeśli zachodzi równość.*
UWAGA 2: *Za każdy punkt można otrzymać* 0.75 *pkt, ale nieprawidłowa odpowiedź to strata* 0.75 *pkt.*

Zadanie 3 (1 punkt). *Podaj zbiór wartości jakie może przyjmować wyrażenie* $f_X(x)$, *gdzie* $x \in \mathbb{R}$, *a* f_X *jest gęstością pewnej zmiennej ciągłej* X.

Zadanie 4 (1 punkt). *Aby otrzymać nierówność Czebyszewa, korzystamy z nierówności Markowa dla zmiennej* $(X - EX)^2$. *Jakie oszacowanie na* $P(|X - EX| \geq A)$ *otrzymamy, jeśli zamiast zmiennej* $(X - EX)^2$ *wstawimy do nierówności Markowa zmienną* $(X - EX)^4$*?*

Zadanie 5 (3 punkty).

1. *Niech* $X_1, X_2 \sim Pois(1)$ *niezależne. Ile wynosi* $P\left(\frac{X_1+X_2}{2} \leq 1\right)$*?*

2. *Niech* $X_1, X_2, ... \sim Pois(1)$ *niezależne. Ile wynosi* $lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \leq 1\right)$*?*

Odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie 6 (2 punkty). *Czy łancuch Markowa posiadający stany okresowe może mieć dokładnie jeden rozkład stacjonarny? Podaj przykład albo uzasadnij, że nie.*

Zadanie 7 (2 punkty). *Dysponujemy monetą, o której wiemy, że albo jest symetryczna, albo niesymetryczna z prawdopodobieństwem orła* $\frac{1}{4}$*. Rzucamy trzy razy monetą i wypada tylko jeden orzeł. Interesuje nas jakie prawdopodobieństwo orła ma wybrana przez nas moneta.*

1. *Podaj funkcję wiarygodności dla opisanej sytuacji.*

2. *Jak metoda największej wiarygodności odpowiada na interesujące nas pytanie, t.j. z która monetą mamy do czynienia?*

Odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie 8 (2 punkt). *Dane są dwa nieobciążone estymatory* T_1 *i* T_2 *tego samego parametru. Czy jeśli* T_1 *ma mniejszy średni błąd kwadratowy od* T_2*, to musi być też efektywniejszy od* T_2*? Uzasadnij.*