## Egzamin z RPiS NSI (część I - 30 minut), 4 lutego 2010

**Zadanie 1** (1 punkt). *Niech* $A, B, C$ *parami rozłączne i* $A \cup B \cup C = \Omega$. *Jeśli* $E(X|A) = 2$, $E(X|B) = 70$, $E(X|C) = 16$, *to jakie wartości może przyjmować* $P(X)$? *Uzasadnij.*

**Zadanie 2** (1 punkt). *Niech* $X$, $Y$ *dowolne zmienne losowe o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji. Czy:*

- $E(\min(X, Y)) = \min(EX, EY)$?
- $E(X + Y) = EX + EY$?
- $E(XY) = (EX)(EY)$?

*Jeśli Twoja odpowiedź jest w którymś punkcie negatywna, to czy zachodzi (słaba) nierówność w którąś ze stron?*

**Zadanie 3** (2 punkt). *Co mówią nierówności Markowa i Czebyszewa w przypadku zmiennej* $X$ *o rozkładzie geometrycznym* $Geom(p)$?

**Zadanie 4** (1 punkt). *Niech* $X_1, X_2, \ldots$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych o rozkładzie Poissona* $Pois(2)$. *Co mówi Słabe Prawo Wielkich liczb zastosowane do tych zmiennych? Czy spełnione są jego założenia?*

**Zadanie 5** (2 punkty). *Niech $M$ będzie łańcuchem Markowa o stanach $0, 1, \ldots, n$ i prawdopodobieństwach przejścia: $p_{i,i+1} = \frac{i+1}{i+2}$ oraz $p_{i,i-1} = \frac{1}{i+2}$ dla $0 < i < n$. Ponadto $p_{0,0} = p_{n,n} = 1$. Które stany $M$ są chwilowe, a które powracające? Czy $M$ posiada rozkład stacjonarny?*

**Zadanie 6** (2 punkty). *Rozważmy estymator średniej postaci $T(X_1, \ldots, X_n) = \sum_i \alpha_i X_i$, gdzie $0 \leq \alpha_i \leq 1$ i $\sum_i \alpha_i = 1$. Dla jakich $\alpha_i$ estymator ten jest najefektywniejszy, a dla jakich najmniej efektywny? Odpowiedź uzasadnij.*

**Zadanie 7** (1 punkt). *Niech $S, T$ dwa estymatory tego samego parametru. Czy jeśli $S$ ma mniejszy średni błąd kwadratowy od $T$, to $S$ ma też mniejsze obciążenie? Uzasadnij.*

**Uwaga:** Tam gdzie pytamy o uzasadnienie nie chodzi nam o formalny dowód, ale o krótki jedno/dwu-zdaniowy argument.