Prawdopodobieństwo warunkowe

P-stwo iloczynu: $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})$,

P-stwo całkowite: $P(B) = \sum_j P(A_j)P(B|A_j)$, gdzie A_j stanowią podział Ω i $\forall_j P(A_j) > 0$,

Tw. Bayesa: $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}$, gdzie A_j j.w.

Własności E i Var

Całkowita wart. ocz.: $E(X) = \sum_j P(A_j)E(X|A_j)$, gdzie A_j jak w tw. Bayesa,

Liniowość E: $E(aX + bY) = aEX + bEY$,

Multiplikatywność E: $E(XY) = EX \cdot EY$, jeśli X, Y niezależne,

Addytywność Var: $Var(X + Y) = VarX + VarY$, jeśli X, Y niezależne,

Przydatny wzór na wariancję: $VarX = E(X^2) - (EX)^2$.

Funkcje tworzące prawdopodobieństwa

Definicja: $g_X(t) = Et^X = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = i)t^i$, dla X o wartościach w $\mathbb{N}$,

Suma zmiennych: $g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t)$, jeśli X, Y niezależne,

Ciąg zmiennych: $g_{X_1 + \dots + X_Y} = g_Y(g_X(t))$ o ile $Y, X_1, X_2, \dots$ niezależne.

Nierówności

Nier. Markowa: $P(X \geq cEX) \leq \frac{1}{c}$, inaczej $P(X \geq A) \leq \frac{EX}{A}$ (w obu przypadkach $X \geq 0$),

Nier. Czebyszewa: $P(|X - EX| \geq c\mathrm{sd}(X)) \leq \frac{1}{c^2}$, inaczej $P(|X - EX| \geq A) \leq \frac{VarX}{A^2}$,

Ogólna nier. Chernoffa: $P(X \geq a) \leq \min_{t>0} \frac{Ee^{tX}}{e^{ta}}$, oraz $P(X \leq a) \leq \min_{t<0} \frac{Ee^{tX}}{e^{ta}}$,

Szczególny przypadek: Jeśli $X_1, X_2, \dots$ niezal. 0/1-kowe, $P(X_i = 1) = p_i$, $X = \sum X_i$ i $\mu = EX = \sum p_i$, to:

- $P(X \geq (1+\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mu} \leq e^{-\frac{\delta^2\mu}{3}}$, dla $0 < \delta$,
- $P(X \leq (1-\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{(1-\delta)}}\right)^{\mu} \leq e^{-\frac{\delta^2\mu}{2}}$, dla $0 < \delta < 1$

Twierdzenia o sumie niez. zmiennych o tym samym rozkładzie

Słabe Prawo Wielkich Liczb: Niech $X_1, X_2, \dots$ niezależne o tym samym rozkładzie, $EX_1 = \mu$ i niech $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Dla dowolnego ε zachodzi $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$,

Centralne Tw. Graniczne: Niech $X_1, X_2, \dots$ j.w. i $VarX_1 = \sigma^2$. Wtedy: $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(z)$,

Podstawowe rozkłady dyskretne

W tym i kolejnym paragrafie X jest zawsze zmienną o odpowiednim rozkładzie.

Dwumianowy Binom(n, p)**:** $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, \dots, n$, $EX = np$, $VarX = np(1-p)$, $g_X(t) = (1 - p + pt)^n$,

Geometryczny Geom(p)**:** $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ dla $k = 1, 2, \dots$, $EX = \frac{1}{p}$, $VarX = \frac{1-p}{p^2}$, $g_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$,

Poissona Pois(λ)**:** $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ dla $k = 0, 1, \dots$, $EX = \lambda$, $VarX = \lambda$, $g_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

Podstawowe rozkłady ciągłe

Wykładniczy Exp(λ)**:** $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ dla $t \geq 0$, $EX = \frac{1}{\lambda}$, $VarX = \frac{1}{\lambda^2}$,

Normalny N(μ, σ)**:** $f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $EX = \mu$, $VarX = \sigma^2$.