Zadanie 1. Monty Hall vs szalony informatyk z Excelem (10 punktów). *Bierzesz udział w teleturnieju Monty'ego Halla odbywającego się według następującego scenariusza:*

1. *Monty Hall umieszcza za jedna z trzech zasłon nagrodę.*
2. *Ty wybierasz jedną z zasłon.*
3. *Monty Hall odsłania jedną z pozostałych zasłon, ale nie zasłonę z nagrodą.*
4. *Możesz zmienić swój wybór.*
5. *Wygrywasz jeśli za wybraną przez Ciebie zasłoną jest nagroda.*

Po latach badań statystycznych udało Ci się skonstruować model zachowania Monty'ego Halla. Wiesz, że umieszcza on nagrodę za i-tą zasłoną z prawdopodobieństwem p_i, dla $i = 1, 2, 3$. Ponadto, jeśli w trzecim kroku zabawy ma do wyboru którą zasłonę odsłonić, to dokonuje wyboru losowo.

1. *Znajdź optymalną strategię i odpowiadające jej prawdopodobieństwo wygranej (5 punktów),*
2. *J.w. ale w sytuacji, gdy zasłony są cztery (5 punktów).*

Uwaga: W dowodzie optymalności możesz ograniczyć swoje rozważania do strategii deterministycznych, tzn. takich, w których wszystkie decyzje są z góry ustalone lub zależne od decyzji Monty'ego Halla.

Szkic rozwiązania

Wersja prostsza

W wersji prostszej (3 bramki), wszystkie deterministyczne strategie mają postać: "Wybierz bramkę a, jeśli prowadzący odsłania b, to zmieniaj/nie zmieniaj, jeśli prowadzący odsłania c, to zmieniaj/nie zmieniaj", gdzie a, b, c jest pewną permutacją $1, 2, 3$.

Zastanówmy się jakie jest prawdopodobieństwo sukcesu takiej strategii:

- Dla strategii, które nigdy nie zmieniają bramki, prawdopodobieństwo to jest równe p_a. W takiej strategii wygrywamy dokładnie wtedy, gdy trafimy na nagrodę w pierwszym strzale.
- Dla strategii, które zawsze zmieniają bramkę, prawdopodobieństwo to jest równe $p_b + p_c$. W takiej strategii wygrywamy dokładnie wtedy, gdy nie trafimy na nagrodę w pierwszym strzale.
- Dla strategii, które zmieniają bramkę (na c) tylko jeśli prowadzący wskaże b, wygrywamy wtedy gdy: albo zgadliśmy poprawnie a i prowadzący zdecydował się odsłonić b, albo nagroda była za c. Łatwo sprawdzić (rachunek pomijam), że prawdopodobieństwo sukcesu wynosi tu $\frac{1}{2}p_a + p_c$.

Widać, że największe prawdopodobieństwo uzyskamy wybierając najmniej prawdopodobną bramkę i zawsze zmieniając wybór. Prawdopodobieństwo to jest równe $p_b + p_c$.

Wersja trudniejsza

Tu zadanie nieco się komplikuje, bo liczba możliwych rodzajów strategii jest większa niż poprzednio. Dlatego postąpimy nieco inaczej.

Zastanówmy się najpierw nad tym jak powinniśmy postąpić, jeśli wybraliśmy bramkę a, a prowadzący odsłonił bramkę b ($b \neq a$). Przyjmijmy zatem, że wybieramy bramkę a, niech M zmienną opisującą wybór prowadzącego, a N miejsce w którym jest nagroda. Interesują nas wielkości $P(N = x|M = b)$, dla $x = a, c, d$. Łatwo je policzyć z tw. Bayesa:

$$P(N = x|M = b) = P(N = x)P(M = b|N = x)/(\sum_{i=1}^{4} P(N = i)P(M = b|N = i)).$$

Mamy teraz dwa przypadki. Wyrażenie $P(N = i)P(M = b|N = i)$ ma wartość $\frac{1}{3}p_a$ dla $i = a$ (wtedy prowadzący ma do wyboru 3 bramki), oraz $\frac{1}{2}p_i$, dla $i \neq a$ (i oczywiście $i \neq b$).

A zatem mianownik wzoru Bayesa, tj. $P(M = b)$ ma wartość $P(M = b) = \frac{1}{2}(p_c + p_d) + \frac{1}{3}p_a$. Ponadto

$$P(N = a|M = b) = \frac{1}{3}p_a/P(M = b),$$

oraz

$$P(N = x|M = b) = \frac{1}{2}p_x/P(M = b)$$

dla $x = c, d$. W związku z tym, jeśli wybraliśmy bramkę a i prowadzący odsłonił bramkę b, to należy zmienić nasz wybór na lepszą z bramek c, d jeśli $\max(p_c, p_d) \geq \frac{2}{3}p_a$ i pozostać przy a wpp.

Wiemy już kiedy i jak zmieniać bramkę. Nie jest jednak jasne jak wybrać a. Spróbujmy obliczyć prawdopodobieństwo sukcesu dla strategii, która zaczyna od bramki a, a potem gra zgodnie z naszymi dotychczasowymi rozważaniami. Niech S będzie zdarzeniem oznaczającym sukces. Wtedy

$$P(S) = \sum_{x=b,c,d} P(M = x)P(S|M = x).$$

Wiemy z dotychczasowych rozważań, że

$$P(S|M = b) = \frac{\max\{\frac{1}{3}p_a, \frac{1}{2}p_c, \frac{1}{2}p_d\}}{P(M = b)},$$

i analogicznie dla $M = c$ i $M = d$. A zatem

$$P(S) = \max\{\frac{1}{3}p_a, \frac{1}{2}p_b, \frac{1}{2}p_c\} + \max\{\frac{1}{3}p_a, \frac{1}{2}p_b, \frac{1}{2}p_d\} + \max\{\frac{1}{3}p_a, \frac{1}{2}p_c, \frac{1}{2}p_d\}.$$

Bez straty ogólności załóżmy $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4$. Jeśli $a = 1$, to$P(S) = p_4 + \frac{1}{2}p_3$. Łatwo uzasadnić, że lepiej być nie może. Jeśli bowiem $a \neq 4$, to dwa z wyrazów w tej sumie są $\leq \frac{1}{2}p_4$, a trzeci $\leq \frac{1}{2}p_3$. Natomiast jeśli $a = 4$, to wszystkie wyrazy są $\leq \max\{\frac{1}{3}p_4, \frac{1}{2}p_3\}$, więc całość, jest $\leq \max\{p_4, \frac{3}{2}p_3\} \leq p_4 + \frac{1}{2}p_3$.

A zatem należy wybrać bramkę o najmniejszym prawdopodobieństwie, a następnie zawsze zmieniać wybór na bramkę o większym prawdopodobieństwo. Prawdopodobieństwo sukcesu dla tej strategii jest równe $p_4 + \frac{1}{2}p_3$. Warto zwrócić uwagę na to, że wybieranie jako pierwszej bramki nr 2 (a nie 1) także maksymalizuje prawdopodobieństwo wygranej. Intuicyjnie, naszym celem jest próba zmuszenia prowadzącego, żeby wskazał nam wśród bramek 3 i 4 tę, za którą nie ma nagrody.