Kolokwium z RPiS, 10 grudnia 2010

Zadanie 1 (10 punktów). *Gracze A, B grają w następującą grę: Każdy z nich rzuca monetą aż do wypadnięcia pierwszego orła. Niech a/b będzie liczbą rzutów dla A/B. Gracz A wygrywa, jeśli $a = b$. Gracz B wygrywa jeśli $|a - b| = k$. Zakładamy, że orzeł wypada z prawdopodobieństwem p. Dla jakich wartości k i p obaj gracze mają takie same szanse na wygraną?*

Zadanie 2 (10 punktów).
Przypomnienie faktu z ćwiczeń
Rzucamy monetą, aż do wypadnięcia pierwszego orła. Zakładamy, że prawdopodobieństwo orła w pojedynczym rzucie wynosi p. Jeśli przez X oznaczymy liczbę wykonanych rzutów, to zmienna X spełnia następujący warunek:

$$P(X = 2|X > 1) = P(X = 1)$$

(jest to szczególny przypadek tzw. własności braku pamięci).
Polecenie
W tym zadaniu badamy sytuację w której moneta, której używamy wykonując rzuty, jest wybierana losowo z pewnego zbioru monet. Niech Z będzie prawdopodobieństwem orła dla tej losowo wybranej monety. Wykonując rzuty nie znamy wartości Z, wiemy jednak jaki Z ma rozkład (możesz założyć, że jest to rozkład dyskretny – trudno wyobrazić sobie nieprzeliczalny zbiór monet). Pokaż, że w takiej sytuacji zachodzi:

$$P(X = 1) - P(X = 2|X > 1) = \frac{Var(Z)}{1 - EZ}.$$

Zadanie 3 (10 punktów). Mapą *nazywamy kwadrat $n \times n$, podzielony na kwadraciki 1×1, z których każdy jest albo lądem albo morzem.* Małą wyspą *na mapie jest kwadracik lądu otoczony ze wszystkich czterech stron morzem. Zwróć uwagę, że mała wyspa nie może znajdować się na brzegu mapy — nie wiadomo, czy przypadkiem tuż za końcem mapy nie czai się ląd.*

Rozważmy losową mapę, t.j. taką, w której każde pole jest lądem/morzem z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, niezależnie od pozostałych. Niech X będzie liczbą małych wysp. Twoim zadaniem jest:

- *obliczenie wartości oczekiwanej X (3 pkt.),*
- *obliczenie wariancji X (5 pkt.),*
- *jak najlepsze oszacowanie $P(X = 0)$ z góry (2 pkt.).*

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.