

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021
ćwiczenia 24. – wskazówki i rozwiązania

31 maja 2021

1. Znaleźć bazy przestrzeni rozwiązań układów jednorodnych:

a)
$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 4x + 3y \end{cases},$$

Znajdujemy wartości własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jej wielomian charakterystyczny to $(\lambda - 2)(\lambda - 3) - 12 = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda + 1)(\lambda - 6)$. Zatem wartości własne to -1 i 6 .

Znajdujemy bazy przestrzeni własnych: dla wartości -1 jest opisana równaniem $3x + 3y = 0$, zatem rozpięta przez wektor $(-1, 1)$. Dla wartości 6 jest opisana równaniem $-4x + 3y = 0$, zatem rozpięta przez wektor $(3, 4)$.

Wobec tego mamy dwa rozwiązania bazowe: $(-e^{-t}, e^{-t})$ i $(3e^{6t}, 4e^{6t})$, a każde inne rozwiązanie jest ich kombinacją:

$$C_1(-e^{-t}, e^{-t}) + C_2(3e^{6t}, 4e^{6t}) = (-C_1e^{-t} + 3C_2e^{6t}, C_1e^{-t} + 4C_2e^{6t}),$$

czyli

$$\begin{cases} x(t) = -C_1e^{-t} + 3C_2e^{6t} \\ y(t) = C_1e^{-t} + 4C_2e^{6t} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases},$$

Znajdujemy wartości własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jej wielomian charakterystyczny to $(1 - \lambda)^2 + 9 = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = (\lambda + 1)(\lambda - 6)$. Zatem wartości własne to $1 - 3i$ i $1 + 3i$.

Znajdujemy bazy przestrzeni własnych: dla wartości $1 - 3i$ jest opisana równaniem $3ix - 3y = 0$, zatem rozpięta przez wektor $(-i, 1)$. Dla wartości $1 + 3i$ jest opisana równaniem $-3ix - 3y = 0$, zatem rozpięta przez wektor $(i, 1)$.

Wobec tego mamy dwa rozwiązania bazowe: $(-ie^{(1-3i)t}, e^{(1-3i)t}) = (e^t(\sin 3t - i \cos 3t), e^t(\cos 3t - i \sin 3t))$ i $(ie^{(1+3i)t}, e^{(1+3i)t}) = (e^t(\sin 3t + i \cos 3t), e^t(\cos 3t + i \sin 3t))$, a każde inne rozwiązanie jest ich kombinacją.

$$\begin{aligned} & (C_1e^t(\sin 3t - i \cos 3t) + C_2e^t(\sin 3t + i \cos 3t), C_1e^t(\cos 3t - i \sin 3t) + C_2e^t(\cos 3t + i \sin 3t)) = \\ & = ((C_1 + C_2)e^t \sin 3t - i(C_1 - C_2)e^t \cos 3t, (C_1 + C_2)e^t \cos 3t - i(C_1 - C_2)e^t \sin 3t) = \\ & = (Ae^t \sin 3t - Be^t \cos 3t, Ae^t \cos 3t - Be^t \sin 3t), \end{aligned}$$

gdzie $A, B \in \mathbb{R}$ są takie, że $A = C_1 + C_2$ oraz $B = i(C_1 - C_2)$.

$$c) \begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = y + 2z \\ z' = -y + 4z \end{cases},$$

Znajdujemy wartości własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Jej wielomian charakterystyczny to $-(\lambda - 3)^2(\lambda - 2)$. Zatem wartości własne to 3 i 2.

Znajdujemy bazy przestrzeni własnych: dla wartości 3 jest opisana równaniem $-2y + 2z = 0$, zatem rozpięta przez wektory $(1, 0, 0), (0, 1, 1)$. Dla wartości 2 jest opisana równaniami $x = 0$ i $-y + 2z = 0$, zatem rozpięta przez wektor $(0, 2, 1)$.

Wobec tego mamy trzy rozwiązania bazowe: $(e^{3t}, 0, 0)$, $(0, e^{3t}, e^{3t})$ i $(0, 2e^{2t}, e^{2t})$, a każde inne rozwiązanie jest ich kombinacją.

d) Dla układu a) wskaż rozwiązanie spełniające warunek początkowy $x(1) = 0, y(2) = 3$.

Zatem

$$\begin{cases} 0 = x(1) = -C_1 e^{-1} + 3C_2 e^6 \\ 3 = y(2) = C_1 e^{-2} + 4C_2 e^{12} \end{cases}$$

co jest układem równań na C_1 i C_2 dającym rozwiązanie:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{9e^2}{3+4e^7} \\ C_2 = \frac{3}{e^5(3+4e^7)} \end{cases},$$

czyli

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{9e^2}{3+4e^7} e^{-t} + 3\frac{3}{e^5(3+4e^7)} e^{6t} \\ y(t) = \frac{9e^2}{3+4e^7} e^{-t} + 4\frac{3}{e^5(3+4e^7)} e^{6t} \end{cases}$$

2. Znajdź rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego

$$a) \begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1} \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1} \end{cases},$$

Rozwiązujemy najpierw układ oznaczony

$$\begin{cases} x' = -4x - 2y \\ y' = 6x + 3y \end{cases},$$

znajdujemy wartości własne macierzy

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jej wielomian charakterystyczny to $x^2 + x$. Zatem wartości własne to -1 i 0 .

Znajdujemy bazy przestrzeni własnych: dla wartości 0 jest opisana równaniem $-4x - 2y = 0$, zatem rozpięta przez wektor $(-1, 2)$. Dla wartości -1 jest opisana równaniem $-3x - 2y = 0$, zatem rozpięta przez wektor $(-2, 3)$.

Wobec tego mamy dwa rozwiązania bazowe: $(-1, 2)$ i $(-2e^{-t}, 3e^{-t})$, a każde inne rozwiązanie jest ich kombinacją:

$$C_1(-1, 2) + C_2(-2e^{-t}, 3e^{-t}) = (-C_1 - 2C_2e^{-t}, 2C_1 + 3C_2e^{-t}),$$

czyli

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 - 2C_2e^{-t} \\ y(t) = 2C_1 + 3C_2e^{-t} \end{cases}.$$

Uzmienniamy stałe i:

$$\begin{cases} x'(t) = -C_1' - 2C_2'e^{-t} + 2C_2e^{-t} \\ y'(t) = 2C_1' + 3C_2'e^{-t} - 3C_2e^{-t} \end{cases},$$

więc

$$\begin{cases} -C_1' - 2C_2'e^{-t} = \frac{2}{e^t-1} \\ 2C_1' + 3C_2'e^{-t} = -\frac{3}{e^t-1} \end{cases},$$

co jest układem równań na C_1' i C_2' , rozwiązując dostajemy:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2e^{-t} & \frac{2}{e^t-1} \\ 2 & 3e^{-t} & -\frac{3}{e^t-1} \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + 2w_1} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2e^{-t} & \frac{2}{e^t-1} \\ 0 & -e^{-t} & \frac{1}{e^t-1} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \cdot (-1), w_2 \cdot (-e^t)} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2e^{-t} & -\frac{2}{e^t-1} \\ 0 & 1 & -\frac{e^t}{e^t-1} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2e^{-t}w_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{e^t}{e^t-1} \end{array} \right]$$

czyli $C_1'(t) = 0$, a więc $C_1(t) = D_1$, $C_2(t) = \int \frac{-e^t}{e^t-1} dt = -\ln(1-e^t) + D_2$ (aby obliczyć tę całkę trzeba podstawić $u = e^t - 1$), zatem

$$\begin{cases} x(t) = -D_1 - 2(-\ln(1-e^t) + D_2)e^{-t} \\ y(t) = 2D_1 + 3(-\ln(1-e^t) + D_2)e^{-t} \end{cases}.$$

b)
$$\begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y \end{cases}.$$

Rozwiązujemy najpierw układ jednorodny:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}.$$

Wartości własne to $\pm i$ i odpowiadające im wektory własne to $(1, 1-i)$ oraz $(1, 1+i)$ odpowiednio dla i i $-i$. Zatem rozwiązania bazowe to $(e^{it}, (1-i)e^{it})$ oraz $(e^{-it}, (1+i)e^{it})$, czyli

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it} = (C_1 + C_2) \cos t + (C_1 - C_2) \sin t = A \cos t + B \sin t \\ y(t) = C_1 (1-i) e^{it} + C_2 (1+i) e^{-it} = (C_1 + C_2)(\cos t + \sin t) - i(C_1 - C_2)(\cos t - \sin t) = \\ = A(\cos t + \sin t) - B(\cos t - \sin t) \end{cases},$$

co po uzmiennieniu stałych daje równania na A' i B' postaci

$$\begin{cases} A' \cos t + B' \sin t = \frac{1}{\cos t} \\ A'(\cos t + \sin t) - B'(\cos t - \sin t) = 0 \end{cases},$$

co daje

$$\begin{aligned} A'(t) &= \frac{\cos t - \sin t}{\cos t} \\ B'(t) &= \frac{\cos t + \sin t}{\cos t}. \end{aligned}$$

A zatem

$$\begin{aligned} A(t) &= t + \ln \cos t + D_1. \\ B(t) &= t - \ln \cos t + D_2. \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{cases} x(t) = (t + \ln \cos t + D_1) \cos t + (t - \ln \cos t + D_2) \sin t \\ y(t) = (t + \ln \cos t + D_1)(\cos t + \sin t) - (t - \ln \cos t + D_2)(\cos t - \sin t) \end{cases}.$$

3. Rozważmy trzy zbiorniki A, B, C wody ustawione w taki sposób, że możliwy jest przepływ wody z A do B , B do C , C do B i B do A . Zbiornik A zawiera 60 litrów wody, w której rozpuszczono 30kg soli, zaś zbiorniki B i C – czystą wodę (po 60l). Zbiornik A zasilany jest wodą wlewaną z prędkością 4l/min. Ze zbiornika A do B oraz ze zbiornika B do C następuje przepływ wody z prędkością 6l/min, zaś z B do A oraz z C do B z prędkością 2l/min. Ze zbiornika C odprowadzany jest dodatkowo roztwór z prędkością 4l/min. Określ ilość soli w kg w poszczególnych zbiornikach w zależności od czasu.

Zadanie pochodzi z podręcznika AGH. Niech a, b, c oznaczają odpowiednio ilość soli w zbiornikach A, B i C . Mamy:

$$\begin{cases} a' = -\frac{6}{60}a + \frac{2}{60}b \\ b' = \frac{6}{60}a - \frac{2+2}{60}b + \frac{2}{60}c \\ c' = \frac{6}{60}b - \frac{2+4}{60}c \end{cases},$$

czyli

$$\begin{cases} a' = -\frac{1}{10}a + \frac{1}{30}b \\ b' = \frac{1}{10}a - \frac{1}{15}b + \frac{1}{30}c \\ c' = \frac{1}{10}b - \frac{1}{10}c \end{cases}.$$

Mamy też warunki brzegowe $a(0) = 30, b(0) = 0, c(0) = 0$. A więc szukamy wartości własnych macierzy

$$\frac{1}{30} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

i te wartości to $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}$ i $-\frac{1}{30}$. Dają one odpowiednio wektory własne $(1, -3, 3), (-1, 0, 3)$ oraz $(1, 2, 3)$.
Zatem rozwiązania bazowe to $(e^{-\frac{t}{5}}, -3e^{-\frac{t}{5}}, 3e^{-\frac{t}{5}}), (-e^{-\frac{t}{10}}, 0, 3e^{-\frac{t}{10}})$ oraz $(e^{-\frac{t}{30}}, 2e^{-\frac{t}{30}}, 3e^{-\frac{t}{30}})$. Zatem

$$\begin{cases} a(t) = C_1 e^{-\frac{t}{5}} - C_2 e^{-\frac{t}{10}} + C_3 e^{-\frac{t}{30}} \\ b(t) = -3C_1 e^{-\frac{t}{5}} + 2C_3 e^{-\frac{t}{30}} \\ c(t) = 3C_1 e^{-\frac{t}{5}} + 3C_2 e^{-\frac{t}{10}} + 3C_3 e^{-\frac{t}{30}} \end{cases}.$$

Wstawiając warunki brzegowe mamy:

$$\begin{cases} 30 = C_1 - C_2 + C_3 \\ 0 = -3C_1 + 2C_3 \\ 0 = 3C_1 + 3C_2 + 3C_3 \end{cases},$$

co daje $C_1 = 6, C_2 = -15$ oraz $C_3 = 9$, więc

$$\begin{cases} a(t) = 6e^{-\frac{t}{5}} + 15e^{-\frac{t}{10}} + 9e^{-\frac{t}{30}} \\ b(t) = -18e^{-\frac{t}{5}} + 18e^{-\frac{t}{30}} \\ c(t) = 18e^{-\frac{t}{5}} - 45e^{-\frac{t}{10}} + 27e^{-\frac{t}{30}} \end{cases}.$$