

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021
ćwiczenia 22. – wskazówki i rozwiązania

24 maja 2021

1. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $(3, -1, 2)$, $(0, 2, 1)$ oraz $(4, 1, 2)$.

Zatem jest to płaszczyzna: $(0, 2, 1) + \text{lin}((3, -3, 1), (4, -1, 1))$. Szukamy równania opisującego płaszczyznę $\text{lin}((3, -3, 1), (4, -1, 1))$. Układ równań opisujący prostą prostopadłą to

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

zatem wektor prostopadły do $\text{lin}((3, -3, 1), (4, -1, 1))$ to $(-2, 1, 9)$, a zatem płaszczyzna ta jest opisana równaniem

$$-2x + y + 9z = 0,$$

wstawiamy $(0, 2, 1)$ i mamy 11, zatem nasza płaszczyzna jest opisana przez

$$-2x + y + 9z = 11.$$

2. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $(2, 7, -1)$, $(4, 1, 2)$ i równoległej do wektora $(1, 0, 0)$.

Zatem ta płaszczyzna to $(2, 7, -1) + \text{lin}((2, -6, 3), (1, 0, 0))$. Szukamy równania opisującego płaszczyznę $\text{lin}((2, -6, 3), (1, 0, 0))$. Układ równań opisujący prostą prostopadłą to

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

zatem wektor prostopadły do $\text{lin}((2, -6, 3), (1, 0, 0))$ to $(0, 1, 2)$, a zatem płaszczyzna ta jest opisana równaniem

$$y + 2z = 0,$$

wstawiamy $(2, 7, -1)$ i mamy 5, zatem nasza płaszczyzna jest opisana przez

$$y + 2z = 5.$$

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważmy wektory: $\alpha = (-1, 2, 2)$, $\beta = (-1 + 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$, $\gamma = (2, 1, t)$. Obliczyć kąt między wektorami α i β oraz określić dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ kąt między wektorami α i γ wynosi 120° .

Rozwiązanie: $\cos(\alpha, \beta) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} = \frac{9}{3 \cdot 6} = \frac{1}{2}$, czyli szukany kąt to 60° .

$$\frac{-1}{2} = \cos(\alpha, \gamma) = \frac{2t}{3 \cdot \sqrt{5+t^2}}, \text{ czyli } t = -\sqrt{\frac{45}{7}}.$$

4. Niech $A = (2, 1)$, $B = (3, 5)$, $C = (8, 13)$. Czy trójkąt ABC jest ostro-, prosto-, czy rozwartokątny?

$\vec{BA} = (-1, -4)$, $\vec{BC} = (5, 8)$, zatem jeśli γ to kąt między tymi wektorami, to $\cos \gamma = \frac{-37}{17 \cdot 89}$ jest ujemny, więc ten kąt jest rozwarty. Trójkąt jest więc rozwartokątny.

5. Obliczyć odległość punktu $(-1, 3, 1)$ od płaszczyzny opisanej równaniem $4x - 3y + 112z = 39$.

Prosta prostopadła do tej płaszczyzny i przechodząca przez punkt $(-1, 3, 1)$ to $(-1, 3, 1) + \text{lin}((4, -3, 112))$, zatem jest to $\{(-1+4t, 3-3t, 1+112t) : t \in \mathbb{R}\}$. Jej przecięcie z płaszczyzną to punkt, który spełnia równanie, zatem

$$4(-1+4t) - 3(3-3t) + 112(1+112t) = 39$$

Zatem $t = \frac{-60}{12569}$, a więc wektor łączący nasz punkt i jego rzut na płaszczyznę to

$$\frac{-60}{12569}(4, -3, 112)$$

a jego długość, to

$$\frac{60}{12569}\sqrt{4^2 + 3^2 + 112^2} = \frac{60}{\sqrt{12569}}.$$

6. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach:

a) $(1, 2), (2, 3)$ i $(4, 7)$,

Wektory wyznaczające ten trójkąt to $(1, 1)$ i $(3, 5)$. Zatem

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 34 \end{vmatrix}} = \frac{2}{2} = 1$$

b) $(1, 2, 3), (2, 3, 5)$ i $(4, 7, 1)$

Wektory wyznaczające ten trójkąt to $(1, 1, 2)$ i $(3, 5, -2)$. Zatem

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 38 \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt{192}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

c) $(1, 2, 5, 3), (2, 3, -1, 0)$ i $(4, 7, -2, 1)$.

Wektory wyznaczające ten trójkąt to $(1, 1, -6, -3)$ i $(3, 5, -7, -2)$. Zatem

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 47 & 56 \\ 56 & 87 \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt{953}}{2}.$$