

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021
ćwiczenia 21. – wskazówki i rozwiązania

21 maja 2021

1. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Przedstawić A w postaci CDC^{-1} , gdzie D to macierz diagonalna, a C to pewna macierz odwracalna.

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -6 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2),$$

Zatem wartości własne to 3 oraz 2. Równanie $x + 2y = 0$ opisuje przestrzeń własną dla wartości 3, zatem jest ona rozpięta przez wektor $(-2, 1)$. Równanie $x + 3y = 0$ opisuje przestrzeń własną dla wartości 2, zatem jest ona rozpięta przez wektor $(-3, 1)$.

Zatem $\mathcal{A} = \{(-2, 1), (-3, 1)\}$ jest bazą złożoną z wektorów własnych oraz $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ oraz

$$C = M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) wyznaczyć macierz A^{100} .

Mamy

$$M(id)_{st}^{\mathcal{A}} = (M(id)_{\mathcal{A}}^{st})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{aligned} A^{100} &= M(id)_{\mathcal{A}}^{st} \cdot D^{100} \cdot M(id)_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100} & 6 \cdot 2^{100} - 6 \cdot 3^{100} \\ -2^{100} + 3^{100} & 3^{101} - 2^{101} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Czy da się przedstawić A w postaci CDC^{-1} , gdzie D to rzeczywista macierz diagonalna, a C to pewna rzeczywista macierz odwracalna? Jeśli tak, to znaleźć macierze C i D .

Wielomian charakterystyczny to $\lambda^2 + 1$, nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc nie ma rzeczywistych wartości własnych – nie da się.

b) Czy da się przedstawić A w postaci CDC^{-1} , gdzie D to zespolona macierz diagonalna, a C to pewna zespolona macierz odwracalna? Jeśli tak, to znaleźć macierze C i D .

Pierwiastki zespolone to i oraz $-i$, więc

$$D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Przestrzeń własna dla i jest wyznaczona równaniem $-ix - y = 0$, zatem jest rozpięta przez $(1, -i)$. Przestrzeń własna dla $-i$ jest wyznaczona równaniem $ix - y = 0$, zatem jest rozpięta przez $(1, i)$. Zatem $\mathcal{A} = \{(1, -i), (1, i)\}$ jest bazą złożoną z odpowiednich wektorów własnych oraz

$$C = M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

3. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Czy da się przedstawić A w postaci CDC^{-1} , gdzie D to zespolona macierz diagonalna, a C to pewna zespolona macierz odwracalna? Jeśli tak, to znaleźć macierze C i D .

Wielomian charakterystyczny to $(2 - \lambda)^2$, zatem jedyna wartość własna to 2. Dla tej wartości własnej równanie opisujące przestrzeń własną to $y = 0$, zatem jedyny kierunek własny jest wyznaczony przez wektor $(1, 0)$. Nie ma więc bazy złożonej z wektorów własnych, więc takie przedstawienie jest niemożliwe.

4. Dla poniższych macierzy A obliczyć A^{2021} .

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a)

$$w(\lambda) = (1 - \lambda)(7 - \lambda) + 8 = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5),$$

czyli mamy wartości własne 3 i 5.

$$\mathbb{R}_{(3)}^2 : \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

czyli baza to $\{(-4, 1)\}$,

$$\mathbb{R}_{(5)}^2 : \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

czyli baza to $\{(-2, 1)\}$, a więc mamy bazę własną $\mathcal{A} = \{(-4, 1)(-2, 1)\}$, czyli:

$$\begin{aligned} A^{2021} &= \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3^{2021} & 0 \\ 0 & 5^{2021} \end{bmatrix} \cdot (-1/2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -4 \cdot 3^{2021} & 2 \cdot 5^{2021} \\ 3^{2021} & 5^{2021} \end{bmatrix} \cdot (-1/2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \\ &= 1/2 \begin{bmatrix} 4 \cdot 3^{2021} + 2 \cdot 5^{2021} & 8 \cdot 3^{2021} + 8 \cdot 5^{2021} \\ -3^{2021} + 5^{2021} & -2 \cdot 3^{2021} + 4 \cdot 5^{2021} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b)

$$w(\lambda) = (1 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$$

czyli wartości własne to 1 i 3.

$$\mathbb{R}_{(1)}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

czyli baza tej podprzestrzeni to $\{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$.

$$\mathbb{R}_{(3)}^3 : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

czyli baza tej podprzestrzeni to $\{(0, 1, 1)\}$. A więc mamy bazę własną: $\mathcal{A} = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (0, 1, 1)\}$. Potrzebujemy wyliczyć też $M(\text{id})_{st}^{\mathcal{A}}$. $(1, 0, 0) = (1, 0, 0)_{\mathcal{A}}$, $(0, 1, 0) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\mathcal{A}}$ oraz $(0, 0, 1) = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\mathcal{A}}$,

więc $M(\text{id})_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. A więc:

$$\begin{aligned} A^{2021} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2021} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3^{2021} \\ 0 & -1 & 3^{2021} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + 3^{2021}) & \frac{1}{2}(-1 + 3^{2021}) \\ 0 & \frac{1}{2}(-1 + 3^{2021}) & \frac{1}{2}(1 + 3^{2021}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$