

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021

ćwiczenia 19. – rozwiązania

14 maja 2021

1. Dla poniższych endomorfizmów znaleźć wartości własne i bazy odpowiadających im przestrzeni własnych:

a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi((x, y)) = (2x - y, -x + 2y),$

b) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi((x, y, z, t)) = (-6x - y + 2z, 3x + 2y + t, -14x - 2y + 5z, -t).$

a)

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3,$$

więc $\Delta = 16 - 12 = 4$, czyli wartości własne to 1, 3.

Przestrzeń własna dla wartości własnej 1 jest opisana układem równań $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$, czyli jej baza jest jednowektorowa i jest to wektor (1, 1).

Przestrzeń własna dla wartości własnej 3 jest opisana układem równań $\begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$, czyli jej baza jest jednowektorowa i jest to wektor (1, -1).

b)

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \begin{vmatrix} -6-\lambda & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -6-\lambda & -1 & 2 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ -14 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2. \end{aligned}$$

Czyli wartości własne to 1 i -1.

Przestrzeń własna dla wartości 1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot 7} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 21 & 7 & 0 & 7 \\ -14 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 3w_1, w_3 - 2w_1, w_4 \cdot \frac{-1}{2}} \\ &\begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 7w_4} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{4}} \\ &\begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_2} \begin{bmatrix} -7 & 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot -17} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

czyli baza jest jednowektorowa, np: $(1, -3, 2, 0)$.
Przestrzeń własna dla wartości -1 :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot 5, w_3 \cdot 5} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 15 & 15 & 0 & 5 \\ -70 & -10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 3w_1, w_3 - 14w_1} \\ \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 3w_2} \\ \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{4}, w_3 \cdot \frac{1}{5}} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_2} \\ \begin{bmatrix} -5 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \cdot \frac{-1}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

czyli znów baza jest jednoelementowa, np: $(1, -1, 2, 0)$.

2. Dla poniższych endomorfizmów $\varphi: V \rightarrow V$ zbadać, czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ . Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy i wyliczyć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

a) $V = \mathbb{R}^2, \varphi((a, b)) = (a - b, a + 3b)$,

b) $V = \mathbb{R}^4, \varphi((a, b, c, d)) = (2a + 4b, 5a + 3b, c + d, 3c - d)$.

(a)

$$w(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4,$$

czyli jest jedna wartości własna: 2. Przestrzeń własna dla wartości 2 rozpięta jest przez wektor $(1, -1)$, czyli przestrzeń rozpięta przez wektory własne jest tylko jednowymiarowa.

(b)

$$w(\lambda) = ((2 - \lambda)(3 - \lambda) - 20)((1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3) = (\lambda^2 - 5\lambda - 14)(\lambda^2 - 4)$$

A więc są trzy wartości własne: $-2, 2$ i 7 .

Dla wartości -2 :

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - \frac{5}{4}w_1, w_4 - w_3} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot 14, w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli przykładowa baza to $(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -3)$.

Dla wartości 2:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{4}, w_4 - 3w_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{5}} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2, w_3 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

czyli bazę przestrzeni własnej stanowi wektor $(0, 0, 1, 1)$.

Dla wartości 7:

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

I widać od razu, że przestrzeń własną rozpina $(4, 5, 0, 0)$.

Razem wektory stanowią bazę przestrzeni V : $\mathcal{A} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -3), (0, 0, 1, 1), (4, 5, 0, 0)\}$ oraz

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Dla macierzy: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ zbadać czy jest ona diagonalizowalna. Jeśli tak, to znaleźć macierze C_i , że $C_i^{-1}A_iC_i$ jest diagonalna, $i = 1, 2$.

$w_1(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Jest jedna wartość własna równa 2, a przestrzeń własna dla niej jest rozpięta przez wektor $(1, 1)$, więc nie ma bazy złożonej z wektorów własnych, czyli macierz A_1 nie jest diagonalizowalna.

$w_2(\lambda) = (5 - \lambda)(-1 - \lambda) + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Podobnie mamy tylko jedną wartość własną równą 2, a przestrzeń własna, podobnie, rozpięta jest przez wektor $(1, 1)$, czyli znów nie ma bazy własnej i macierz nie jest diagonalizowalna.

4. Dla poniższych macierzy A stwierdzić, czy A jest diagonalizowalna i jeśli tak, znaleźć macierz C taką, że $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a)

$$w(\lambda) = ((1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4)(-3 - \lambda) = (\lambda^2 + \lambda - 6)(-3 - \lambda) = (2 - \lambda)(-3 - \lambda)^2$$

Więc wartości własne to $-3, 2$

$$V_{(-3)} : \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

czyli baza to $\{(1, -2, 0), (0, 0, 1)\}$.

$$V_{(2)} : \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

czyli baza to $\{(2, 1, 0)\}$.

A więc jest baza własna: $\mathcal{A} = \{(1, -2, 0), (0, 0, 1), (2, 1, 0)\}$, czyli macierz jest diagonalizowalna do

$$\text{postaci } \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ oraz:}$$

$$C = M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b)

$$w(\lambda) = -\lambda(4 - \lambda)(2 - \lambda) + 8 - 4\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3$$

Czyli jedyną wartością własną jest 2 i:

$$V_{(2)} : \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Czyli baza tej przestrzeni własnej to: $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, czyli nie ma bazy własnej, czyli macierz nie jest diagonalizowalna.