

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021

ćwiczenia 9. – rozwiązania

29 marca 2021

1. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x'(t) = t - 2x(t) \operatorname{ctg}(2t)$$

i znaleźć taką funkcję $x(t)$ spełniającą równanie, że $x(\pi/4) = 0$.

To jest równanie liniowe, a jego jednorodna wersja to

$$x' = -2x \operatorname{ctg} 2t,$$

czyli $\ln|x| = -2 \int \operatorname{ctg} 2t \, dt$. Całkę $\int \operatorname{ctg} 2t \, dt = \int \frac{\cos 2t}{\sin 2t}$ liczymy podstawiając $u = \sin 2t$ i wychodzi $\frac{1}{2} \ln(\sin 2t)$, zatem

$$x(t) = C e^{-\ln(\sin 2t)} = \frac{C}{\sin 2t}.$$

Uzmienniając stałą dostajemy $\frac{C'}{\sin 2t} = t$, zatem

$$C(t) = \int t \sin 2t \, dt = -\frac{1}{2} t \cos 2t + \frac{1}{2} \int \cos(2t) \, dt = -\frac{1}{2} t \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t + D,$$

Czyli

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} t \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t + D \right) \frac{1}{\sin 2t}.$$

Sprawdzając warunek brzegowy dostajemy

$$0 = \left(0 + \frac{1}{4} + D \right) \frac{1}{1},$$

zatem $D = -1/4$ oraz

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} t \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\sin 2t}.$$

2. Znaleźć wszystkie funkcje $x(t)$ takie, że dla każdego $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ zachodzi równość

$$x'(t) - (1 + x^2(t)) \cdot \frac{2}{1 + 4t^2} = 0$$

a wśród nich funkcję która dodatkowo spełnia warunek $x(-1/2) = -1$.

To jest równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{x'}{1 + x^2} = \frac{2}{1 + 4t^2}.$$

Dostajemy $\arctg x = \arctg(2t) + C$, zatem $x = \operatorname{tg}(\arctg 2t + C)$.

Wstawiamy warunek brzegowy i mamy

$$-1 = \operatorname{tg}(\arctg(-1) + C) = \operatorname{tg}(-\pi/4 + C),$$

zatem $C = n\pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Zatem

$$x(t) = \operatorname{tg}(\arctg(2t) + n\pi).$$

3. W pokoju o objętości 200 m^3 powietrze zawiera w pewnej chwili $0,15\%$ dwutlenku węgla. Powietrze z zewnątrz zawierające $0,04\%$ dwutlenku węgla jest dostarczane przez wentylator w tempie 20 l/min . Po jakim czasie zawartość dwutlenku węgla w pokoju zmniejszy się trzykrotnie w porównaniu do chwili początkowej?

Niech $x(t)$ będzie ilością dwutlenku w chwili t . Jest więc w pokoju w stężeniu $x(t)/V$, gdzie $V = 200$. Natomiast w jednostce czasu wydostaje się go na zewnątrz $V_w x(t)/V$ i pobierane jest $V_w s$, gdzie $V_w = 20\text{ l} = \frac{2}{100}\text{ m}^3$ oraz $s = 0,0004$. Co oznacza, że jego ilość zmienia się z prędkością opisaną równaniem

$$x'(t) = sV_w - \frac{V_w x(t)}{V},$$

co jest równaniem liniowym, którego wersja jednorodna ma rozwiązanie

$$x(t) = Ce^{-V_w t/V},$$

i uzmienniając stałą mamy $C'(t)e^{-V_w t/V} = sV_w$, czyli

$$C(t) = sV_w \int e^{V_w t/V} dt = sV e^{V_w t/V} + D,$$

czyli

$$x(t) = sV + De^{-V_w t/V}.$$

Dla $t = 0$ mamy $x(t) = s_0 \cdot V$, gdzie $s_0 = 0,0015$ zatem

$$D = s_0 V - sV = (s_0 - s)V.$$

Pytamy dla jakiego t , $x(t) = x(0)/3 = s_0 V/3$. Wtedy

$$t = -\frac{V \ln \frac{s_0 V/3 - sV}{(s_0 - s)V}}{V_w} = -\frac{200 \ln \frac{0,0015 \cdot 200/3 - 0,0004 \cdot 200}{(0,0015 - 0,0004)200}}{0,02} \simeq 23979 \text{ min},$$

czyli po około $16\frac{2}{3}$ dobach.

4. Niech $z = \frac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}})$.

a) obliczyć $|z|$.

$$|z| = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{4}} = 1.$$

b) obliczyć z^2 oraz z^4 .

$$z^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}})(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i),$$

zatem ma moduł oczywiście 1 i argument $\pi/6$, zatem z^4 ma moduł 1 i argument $\pi/3$, zatem wynosi $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$.

- c) znaleźć takie liczby $x, y \in \mathbb{R}$, że $z^{2018} = x + yi$ oraz takie, liczby $u, v \in \mathbb{R}$, że $z^{2019} = u + vi$.
Zatem $z^{2018} = (z^2)^{1009}$ ma moduł 1 i argument $1009\pi/6 \sim \pi/6$, a więc $z^{2018} = z^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$.
Natomiast

$$z^{2019} = z^{2018} z = z^2 z,$$

a skoro $\text{Arg} z^2 = \pi/6$, to $\text{Arg} z = \pi/12$, a więc $\text{Arg} z^3 = \pi/4$ oraz oczywiście $|z^3| = 1$. Zatem

$$z^{2019} = z^3 = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2.$$

5. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z dla których spełniona jest równość

$$z^7 - 27z^4 + 16z^3 - 2^4 \cdot 3^3 = 0.$$

Mamy

$$z^7 - 27z^4 + 16z^3 - 2^4 \cdot 3^3 = (z^3 - 27)(z^4 + 16),$$

wiec rozwiązania to pierwiastki 3 stopnia z 27, a więc 3, $\frac{-1+3\sqrt{3}i}{2}$ oraz $\frac{-1-3\sqrt{3}i}{2}$, oraz cztery pierwiastki czwartego stopnia z -16 (mają moduł 2 oraz argumenty $\pi/4 + k\pi/2$, czyli $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$).

6. Zadanie składa się z następujących części:

a) Znaleźć wszystkie liczby zespolone z takie, że $z^3 + 2z^2 + 5z - 26 = 0$.

Zauważamy, że 2 jest pierwiastkiem tego równania oraz

$$z^3 + 2z^2 + 5z - 26 = (z - 2)(z^2 + 4z + 13) = (z - 2)((z + 2)^2 + 9),$$

a zatem pozostałe pierwiastki to $-2 + 3i$ oraz $-2 - 3i$.

b) Obliczyć $(\sqrt{3} + i)^{10}$ oraz $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2017}$.

$$(\sqrt{3} + i)^{10} = (2e^{i\pi/6})^{10} = 2^{10}e^{i5\pi/3} = 2^{10}e^{-i\pi/3} = 2^{10}(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) =$$

$$= 1024(\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)) = 1024\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 512 - 512\sqrt{3}i$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2017} = (e^{-i\pi/6})^{2017} = e^{-i2017\pi/6} = e^{-i\pi/6} = \cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6) =$$

$$= \cos(\pi/6) - i\sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$