

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021
ćwiczenia 8. – rozwiązania

26 marca 2021

1. Niech f będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wykazać, że:

a) jeśli $c \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu f w $\mathbb{C}$, to $\bar{c}$ też jest pierwiastkiem f ,

Niech $c = a \cdot (\cos \phi + i \sin \phi)$, $a, \phi \in \mathbb{R}$. Niech $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. W takim razie:

$$0 = f(c) = a_0 + a_1c + \dots + a_nc^n = a_0 + a_1a(\cos \phi + i \sin \phi) + a_2a^2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi) + \dots + a_na^n(\cos n\phi + i \sin n\phi),$$

Zatem

$$0 = a_1ai \sin \phi + a_2a^2i \sin 2\phi + \dots + a_na^ni \sin n\phi = -(a_1ai \sin(-\phi) + a_2a^2i \sin(-2\phi) + \dots + a_na^ni \sin(-n\phi)),$$

Zatem

$$\begin{aligned} 0 = f(c) &= a_0 + a_1a(\cos(-\phi) + i \sin(-\phi)) + a_2a^2(\cos(-2\phi) + i \sin(-2\phi)) + \dots + a_na^n(\cos(-n\phi) + i \sin(-n\phi)) = \\ &= f(\bar{c}), \end{aligned}$$

czyli $\bar{c}$ to też pierwiastek.

b) wielomian f rozkłada się nad $\mathbb{R}$ na czynniki stopnia ≤ 2 .

Na podstawie poprzedniego punktu wystarczy zauważyć, że

$$(x - c)(x - \bar{c}) = x^2 - (c + \bar{c})x + c\bar{c} = x^2 - 2\Re(c)x + |c|^2 \in \mathbb{R}[x].$$

2. Dla każdego z poniższych wielomianów znaleźć wszystkie jego pierwiastki, rozłożyć ten wielomian nad $\mathbb{C}$ na czynniki stopnia 1 oraz rozłożyć go nad $\mathbb{R}$ na czynniki stopnia ≤ 2 .

a) $x^2 + 4x + 5$,

$\Delta = 16 - 20 = -4$, $d = 2i$, więc mamy pierwiastki $-2 - i$ oraz $-2 + i$, czyli $x^2 + 4x + 5 = (x + 2 + i)(x + 2 - i)$ w liczbach zespolonych. To już jest wielomian stopnia ≤ 2 , jeśli chodzi o jego rozkład w liczbach rzeczywistych.

b) $x^4 - 2x^2 + 4$,

Niech $z = x^2$, wtedy mamy wielomian $z^2 - 2z + 4 = 0$. $\Delta = 4 - 16 = -12$, $d = 2i\sqrt{3}$, zatem ten wielomian się zeruje w $z \in \{1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\}$, czyli dla $x \in \{\sqrt{6}/2 + i\sqrt{2}/2, -\sqrt{6}/2 + i\sqrt{2}/2, \sqrt{6}/2 - i\sqrt{2}/2, -\sqrt{6}/2 - i\sqrt{2}/2\}$, czyli

$$x^4 - 2x^2 + 4 = (x - \sqrt{6}/2 - i\sqrt{2}/2)(x - \sqrt{6}/2 + i\sqrt{2}/2)(x + \sqrt{6}/2 - i\sqrt{2}/2)(x + \sqrt{6}/2 + i\sqrt{2}/2)$$

czyli w liczbach rzeczywistych rozkłada się na:

$$x^4 - 2x^2 + 4 = (x^2 - 2\sqrt{6}x + 2)(x^2 + 2\sqrt{6}x + 2).$$

c) $x^7 - x$.

Mamy $x^7 - x = x(x^6 - 1)$, a zatem pierwiastki to 0 oraz pierwiastki szóstego stopnia z 1, czyli $1, 1/2 + i\sqrt{3}/2, -1/2 + i\sqrt{3}/2, -1, -1/2 - i\sqrt{3}/2, 1/2 - i\sqrt{3}/2$, a zatem:

$$x^7 - x = x(x - 1)(x - 1/2 - i\sqrt{3}/2)(x + 1/2 - i\sqrt{3}/2)(x + 1)(x + 1/2 + i\sqrt{3}/2)(x - 1/2 + i\sqrt{3}/2)$$

co w rozkładzie w liczbach rzeczywistych daje:

$$x^7 - x = x(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

3. Znaleźć wszystkie pierwiastki

a) stopnia 4 z liczby $-\sqrt{3} + 3i$,

Niech $z = -\sqrt{3} + 3i$. $|z| = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $\text{Arg}z = 2\pi/3$, zatem pierwiastek główny ma moduł $\sqrt[4]{12}$ oraz argument $\pi/6$. Czyli pierwiastki to:

$$\sqrt[4]{12}(\sqrt{3}/2 + i/2), \sqrt[4]{12}(-1/2 + i\sqrt{3}/2), \sqrt[4]{12}(-\sqrt{3}/2 - i/2), \sqrt[4]{12}(1/2 - i\sqrt{3}/2).$$

b) stopnia 6 z liczby $-27i$ (zapisz te pierwiastki tylko w postaci wykładniczej),

Niech $z = -27i$. Wtedy $|z| = 27$ oraz $\text{Arg}z = 3\pi/2$, zatem szukany pierwiastek główny ma moduł $\sqrt[6]{3}$ oraz argument $\pi/4$. Zatem pierwiastki to:

$$\sqrt[6]{3}e^{i\pi/4}, \sqrt[6]{3}e^{7i\pi/12}, \sqrt[6]{3}e^{11i\pi/12}, \sqrt[6]{3}e^{-3i\pi/4}, \sqrt[6]{3}e^{-5i\pi/12}, \sqrt[6]{3}e^{-i\pi/12}$$

c) stopnia 3 z liczby $5 + 5i$ (zapisz te pierwiastki tylko w postaci wykładniczej).

Niech $z = 5 + 5i$. Wtedy $|z| = 5\sqrt{2}$ oraz $\text{Arg}z = \pi/4$. Zatem szukany pierwiastek główny ma moduł $\sqrt[6]{50}$ oraz argument $\pi/12$. Zatem pierwiastki to:

$$\sqrt[6]{50}e^{i\pi/12}, \sqrt[6]{50}e^{3i\pi/4}, \sqrt[6]{50}e^{-7i\pi/12}.$$

4. Niech $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ będą wszystkimi pierwiastkami stopnia n z 1. Wykazać, że:

a) $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = (-1)^{n+1}$.

Mamy:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = e^{0 \cdot 2i\pi/n} \cdot \dots \cdot e^{(n-1) \cdot 2i\pi/n} = e^{(0+\dots+(n-1))2i\pi/n} = e^{\frac{n(n-1)}{2}2i\pi/n} = e^{(n-1)i\pi} = (-1)^{n+1}.$$

b) Jeśli liczby $w_1, w_2 \in C$ należą do n -kąta foremnego W o wierzchołkach $z_1, z_2, \dots, z_n$, to liczba $w_1 \cdot w_2$ też należy do W .

Niech w_1 należy do danego wielokąta. Wtedy $w_1 \cdot w_2 \in w_1 W$, a $w_1 W$ jest n -kątem foremnym o środku w 0 i wierzchołku w_1 . Jasne jest, że $w_1 W \subseteq W$ – wystarczy rozpatrzyć w_1 leżący na jednym z boków W . Zatem $w_1 w_2 \in W$.

5. Naskicować następujące zbiory zawarte w $\mathbb{C}$.

a) $\{z \in \mathbb{C} : \Re(1+i)z \geq 1\}$,

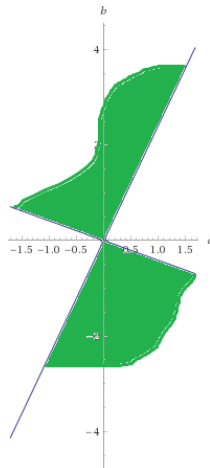
$$\Re(1+i)(a+bi) = a-b \geq 1.$$



b) $\{z \in \mathbb{C} : \Im(1+i)z^2 < 0\}$,

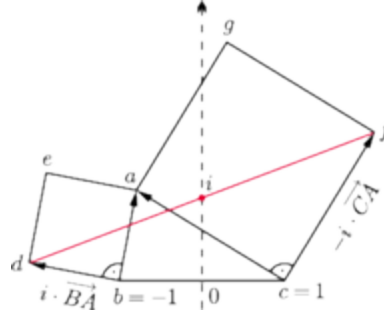
$$(1+i)(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2ab < 0.$$

Jak łatwo policzyć, $a^2 - b^2 + 2ab = 0$ to dwie proste $b = (1 - \sqrt{2})a$ oraz $b = (1 + \sqrt{2})a$.



6. Dane są punkty B i C . Punkt A jest dowolnym punktem ustalonej półpłaszczyzny wyznaczonej przez prostą AB . Na bokach trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Wykaż, że wszystkie tak otrzymane proste DF przechodzą przez pewien ustalony punkt, zależny tylko od położenia B i C . *Wskazówka: umieść tę sytuację na płaszczyźnie zespolonej.*

Zadanie i rysunek pochodzi z artykułu z „Deltę” autorstwa J. Jaszuńskiej.



Ustalmy $b = -1$ oraz $c = 1$. Wtedy $d - b = i(a - b)$ i $f - c = -i(a - c)$, a zatem $d + 1 = ia + i$ oraz $f - 1 = -ia + i$. W takim razie $d + f = 2i$, czyli środek odcinka DF to i , co nie zależy od wyboru punktu A .