

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021
ćwiczenia 7.

22 marca 2021

1. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$. *Wskazówka: rozważ to zadanie na płaszczyźnie zespolonej. Niech $A = 0$ oraz $C = c$. Wtedy $G = ic$ oraz $F = c + ic$.*
2. Czy następujący zbiór $X \subseteq \mathbb{C}$ jest skończony? Jeśli tak, wypisać jego elementy.
 - (a) $X = \{i^n : n \in \mathbb{N}\}$,
 - (b) $X = \{(1 - i)^n : n \in \mathbb{N}\}$.
3. Niech $w = \frac{3+4i}{5}$. Znaleźć taką liczbę zespoloną z , że $w = \frac{z}{\bar{z}}$. Wykazać, że każda liczba zespolona o module 1 jest ilorazem dwóch liczb zespolonych sprzężonych.
4. Poniższą liczbę $z \in \mathbb{C}$, przedstawić w postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.
 - (a) $z = (1 - i)^{100}$
 - (b) $z = \left(\frac{i+\sqrt{3}}{i+1}\right)^{56}$
 - (c) $z = \frac{(\sqrt{3}+3i)^{40}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$
5. Zapisać wielomian w postaci iloczynu wielomianów liniowych o współczynnikach zespolonych oraz w postaci wielomianów stopnia co najwyżej 2 o współczynnikach rzeczywistych.
 - a) $z^3 - z^2 - 4$,
 - b) $z^4 - 1$.
6. Narysuj na płaszczyźnie zbiory
 - a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 - 3i| < 5\}$,
 - b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \Re(iz) > \Im(iz)\}$,
 - c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z^3) < 0\}$.