

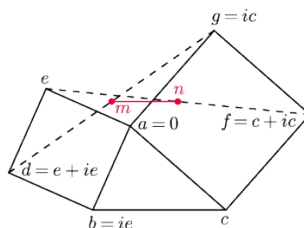
Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021

ćwiczenia 7. – rozwiązania

22 marca 2021

1. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$. Wskazówka: rozważ to zadanie na płaszczyźnie zespolonej. Niech $A = 0$ oraz $C = c$. Wtedy $G = ic$ oraz $F = c + ic$.

Zadanie pochodzi z LII OM, rysunek z artykułu z „Deltą” autorstwa J. Jaszuńskiej.



Rozważmy to zadanie na płaszczyźnie zespolonej. Niech $A = 0$ oraz $C = c$. Wtedy $G = ic$ oraz $F = c + ic$. Niech $E = e$, wtedy $B = ie$ oraz $D = ie + e$. W końcu: $m = ((e + ie) + ic)/2$ oraz $n = (e + (c + ic))/2$. Mamy:

$$\vec{MN} = n - m = \frac{e + c + ic - e - ie - ic}{2} = \frac{c - ie}{2} = \frac{\vec{BC}}{2}.$$

Zatem $MN : BC = 1 : 2$.

2. Czy następujący zbiór $X \subseteq \mathbb{C}$ jest skończony? Jeśli tak, wypisać jego elementy.

(a) $X = \{i^n : n \in \mathbb{N}\}$,

Tak. $X = \{1, i, -1, -i\}$, bowiem $i^4 = 1$.

(b) $X = \{(1 - i)^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ten zbiór jest nieskończony, bowiem $|1 - i| = \sqrt{2} \neq 1$, więc dla każdych $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, $|(1 - i)^n| = \sqrt{2}^n \neq \sqrt{2}^m = |(1 - i)^m|$, więc $(1 - i)^n \neq (1 - i)^m$.

3. Niech $w = \frac{3+4i}{5}$. Znaleźć taką liczbę zespoloną z , że $w = \frac{z}{\bar{z}}$. Wykazać, że każda liczba zespolona o module 1 jest ilorazem dwóch liczb zespolonych sprzężonych.

Rzeczywiście zauważmy, że dla każdej liczby $w \in \mathbb{C}$ takiej że $|w| = 1$, jeśli wezmę liczbę z taką, że $2\text{Arg}z = \text{Arg}w$, oraz $|z| = 1$, to $\text{Arg}(z/\bar{z}) = \text{Arg}z - \text{Arg}\bar{z} = 2\text{Arg}z = \text{Arg}w$, więc $w = \frac{z}{\bar{z}}$. W takim razie w przypadku $w = \frac{3+4i}{5}$, wystarczy $z = \sqrt{\frac{4}{5}} + i\sqrt{\frac{1}{5}}$, bowiem $\cos \alpha/2 = \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}$.

4. Poniższą liczbę $z \in \mathbb{C}$, przedstawić w postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $z = (1 - i)^{100}$

x	$ x $	$\arg x$
$1 - i$	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$
z	2^{50}	π

Zatem $z = -2^{50}$.

$$(b) \quad z = \left(\frac{i+\sqrt{3}}{i+1} \right)^{56}$$

x	$ x $	$\arg x$
$i + \sqrt{3}$	2	$\pi/6$
$i + 1$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
$\frac{i+\sqrt{3}}{i+1}$	$\sqrt{2}$	$-\pi/12$
z	2^{28}	$2\pi/3$

$$\text{Zatem } z = -2^{27} + i2^{27}\sqrt{3}.$$

$$(c) \quad z = \frac{(\sqrt{3}+3i)^{40}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$$

x	$ x $	$\arg x$
$\sqrt{3} + 3i$	$2\sqrt{3}$	$\pi/3$
$(\sqrt{3} + 3i)^{40}$	$2^{40} \cdot 3^{20}$	$4\pi/3$
$\sqrt{3} + i$	2	$\pi/6$
$(\sqrt{3} + i)^{20}$	2^{20}	$4\pi/3$
z	6^{20}	0

$$\text{Zatem } z = 6^{20}.$$

5. Zapisać wielomian w postaci iloczynu wielomianów liniowych o współczynnikach zespolonych oraz w postaci wielomianów stopnia co najwyżej 2 o współczynnikach rzeczywistych.

$$a) \quad z^3 - z^2 - 4,$$

Jednym z pierwiastków jest $z = 2$ oraz mamy $z^3 - z^2 - 4 = (z - 2)(z^2 + z + 2)$, co jest przedstawieniem w postaci wielomianów stopnia co najwyżej 2 o współczynnikach rzeczywistych. Wielomian $z^2 + z + 2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, a pierwiastki zespolone to $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ oraz $\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$. Zatem:

$$z^3 - z^2 - 4 = (z - 2) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2} \right) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2} \right).$$

$$b) \quad z^4 - 1.$$

Mamy $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z + 1)(z - 1)(z^2 + 1)$ jest przedstawieniem w postaci wielomianów stopnia co najwyżej 2 o współczynnikach rzeczywistych. Natomiast $(z + 1)(z - 1)(z + i)(z - i)$ jest w postaci iloczynu wielomianów liniowych o współczynnikach zespolonych.

6. Narysuj na płaszczyźnie zbiory

$$a) \quad A = \{z \in \mathbb{C}: |z + 2 - 3i| < 5\},$$

Jest to koło o promieniu 5 i środku w punkcie $-2 + 3i$.

$$b) \quad B = \{z \in \mathbb{C}: \Re(iz) > \Im(iz)\},$$

Zauważmy, że $\Re(iz) = -\Im z$ oraz $\Im(iz) = \Re z$, zatem mamy: $-\Im z > \Re z$, czyli $\Im z < -\Re z$. Zatem jest to półpłaszczyzna pod prostą $y = -x$.

$$c) \quad C = \{z \in \mathbb{C}: \Re(z^3) < 0\}.$$

$(a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + i(a^2b - b^3)$. Zatem pytamy o $a^3 - 3ab^2 < 0$. Dla $a > 0$ mamy $a^2 - 3b^2 < 0$, zatem $a^2 < 3b^2$, czyli $b \in \mathbb{R} \setminus (-\infty, -a/\sqrt{3}) \cup (a/\sqrt{3}, \infty)$. Natomiast dla $a < 0$ jest na odwrót i dostajemy $a^2 > 3b^2$, więc $b \in (a/\sqrt{3}, -a/\sqrt{3})$. Zatem do zbioru C składa się z odpowiednich pomiędzy prostymi $b = a/\sqrt{3}$ oraz $b = -a/\sqrt{3}$ dla $a < 0$ oraz nad prostą $b = a/\sqrt{3}$ oraz pod prostą $b = -a/\sqrt{3}$ dla $a > 0$.