

Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021

ćwiczenia 6. – rozwiązania

19 marca 2021

1. Rozwiąż równanie $z^2 + (3i + 1)z + (2i - 2) = 0$.

$\Delta = (3i + 1)^2 - 4(2i - 2) = -9 + 1 + 6i - 8i + 8 = -2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, a zatem mamy dwa $\sqrt{\Delta}$ równe:

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$$

oraz

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$$

A zatem szukane pierwiastki to:

$$z_1 = \frac{-1 - 3i - 1 + i}{2} = -1 - i$$

$$z_2 = \frac{-1 - 3i + 1 - i}{2} = -2i.$$

2. Korzystając z postaci trygonometrycznej (biegunowej) zapisać liczby w postaci $a + bi$:

a) $(1 - i\sqrt{3})^{667}$,

x	$ x $	$Argx$
$1 - i\sqrt{3}$	2	$\pi/3$
$(1 - i\sqrt{3})^{667}$	2^{667}	$\frac{667\pi}{3} \sim \pi/3$

więc $(1 - i\sqrt{3})^{667} = 2^{666} - i2^{666}\sqrt{3}$

b) $\frac{(\sqrt{3} + i)^{17}}{(1 + i)^{15}}$.

x	$ x $	$Argx$
$\sqrt{3} + i$	2	$\pi/6$
$(\sqrt{3} + i)^{17}$	2^{17}	$\frac{17\pi}{6} \sim 5\pi/6$
$1 + i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
$(1 + i)^{15}$	$2^7\sqrt{2}$	$15\pi/4 \sim -\pi/4$
$(\sqrt{3} + i)^{17}/(1 + i)^{15}$	$2^9\sqrt{2}$	$5\pi/6 + \pi/4 = 13\pi/12 \sim -11\pi/12$

Zatem szukana liczba to $2^7(-(1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3}))$, bowiem $\cos(-11\pi/12) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $\sin(-11\pi/12) = -\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

3. Zapisać liczby w postaci wykładniczej.

a) $1 - i$

$$1 - i = e^{\ln\sqrt{2} - \frac{i\pi}{4}}$$

b) $\frac{1}{1 + i}$

$$\frac{1}{1 + i} = \frac{1}{e^{\ln\sqrt{2} + \frac{i\pi}{4}}} = e^{-\ln\sqrt{2} - \frac{i\pi}{4}}.$$

4. Rozwiąż równania w $\mathbb{C}$:

a) $z^8 - 1 = 0$,

Zatem $|z| = 1$ oraz $\text{Arg} z = 0 + 2k\pi/8$, więc

$$z \in \{1, \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, i, -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, -1, -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2, -i, \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2\}.$$

b) $z^6 - 64 = 0$,

Zatem $|z| = 2$ oraz $\text{Arg} z = 0 + 2k\pi/6$, więc

$$z \in \{2, 1 + \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i, -2, -1 - \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i\}.$$

c) $z^4 + 81 = 0$,

Zatem $|z| = 3$ oraz $\text{Arg} z = \pi/4 + 2k\pi/4$, więc

$$z \in \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i, \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right\}.$$

d) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$,

Niech $x = z^3$, wtedy $x^2 + 7x + 8 = 0$, zatem $x \in \{-8, 1\}$, zatem z to jedna z 3 wartości $\sqrt[3]{1}$ (czyli $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$) lub jedna z 3 wartości $\sqrt[3]{-8}$ (czyli $1 + \sqrt{3}i, -2$ i $1 - \sqrt{3}i$).

e) $z^3 = \bar{z}$,

Porównując moduły dostajemy, że $|z|^3 = |z|$, zatem $|z| = 1$ lub $|z| = 0$. Porównując argumenty mamy $3\text{Arg} z$ to ten sam kąt z dokładnością do 2π , co $-\text{Arg} z$, zatem $4\text{Arg} z$ to ten sam kąt co 0. Zatem są cztery rozwiązania: $\text{Arg} z \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ i ostatecznie $z \in \{0, 1, i, -1, -i\}$.

f) $|z + i| + |z - i| = 2$,

Są to punkty, których suma odległości od i i $-i$ wynosi 2, a skoro odległość od i do $-i$ wynosi 2, taki punkt musi leżeć na najkrótszej drodze pomiędzy i i $-i$, czyli na odcinku je łączącym. Zatem $z \in \{ai : a \in [-1, 1]\}$.

g) $e^z = 1$,

Niech $z = a + bi$. Porównajmy moduł i argument po obu stronach równości. Mamy $e^a = |e^z| = 1$, więc $a = 0$ oraz $b \sim \text{Arg} 1 = 0$, zatem $b = 2k\pi$, czyli $z \in \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.

h) $e^z = -1$,

Niech $z = a + bi$. Porównajmy moduł i argument po obu stronach równości. Mamy $e^a = |e^z| = |-1| = 1$, więc $a = 0$ oraz $b \sim \text{Arg} -1 = \pi$, zatem $b = 2(k+1)\pi$, czyli $z \in \{(2k+1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.

i) $e^z = i$.

Niech $z = a + bi$. Porównajmy moduł i argument po obu stronach równości. Mamy $e^a = |e^z| = |i| = 1$, więc $a = 0$ oraz $b \sim \text{Arg} i = \pi/2$, zatem $b = 2k\pi + \pi/2$, czyli $z \in \{2k\pi i + i\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Oblicz używając postaci wykładniczej:

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^5 (1 - i\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3} - i)^7 (1 + i\sqrt{3})^5}$$

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^5 (1 - i\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3} - i)^7 (1 + i\sqrt{3})^5} = \frac{e^{5 \ln 2 + \frac{5i\pi}{6}} e^{4 \ln 2 - \frac{4i\pi}{3}}}{e^{7 \ln 2 - \frac{7i\pi}{6}} e^{5 \ln 2 + \frac{5i\pi}{3}}} = e^{-3 \ln 2 - i\pi} = \frac{1}{8}(-1 + 0i) = -\frac{1}{8}.$$

6. Znajdź zbiór punktów na płaszczyźnie zespolonej, taki że $z = 1 - i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$.

