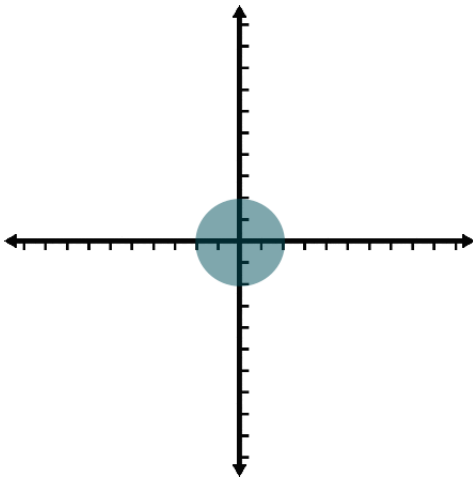


Matematyka A dla Wydziału Chemii, semestr 2., 2020/2021
ćwiczenia 5. – rozwiązania

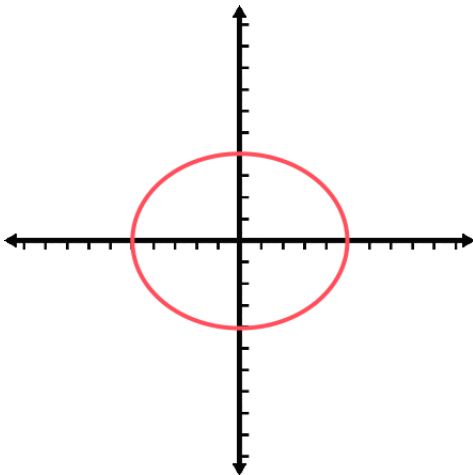
15 marca 2021

1. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej zbiory punktów spełniające warunki:

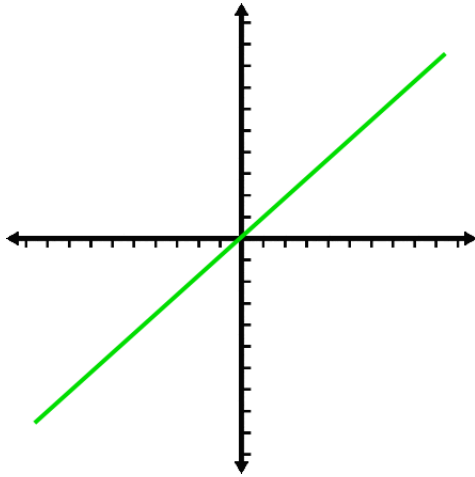
a) $|z| \leq 2$



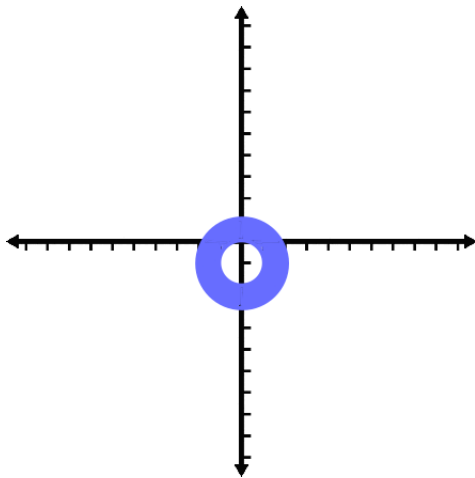
b) $|z - 3| + |z + 3| = 10$



c) $\Re z = \Im z$



d) $1 \leq |z + i| \leq 2$



2. Wykonaj działania:

a) $\frac{2+3i}{5-2i}$

$$\frac{2+3i}{5-2i} = \frac{(2+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{4+19i}{25+4} = \frac{4}{29} + \frac{19}{29}i.$$

b) $\frac{(3+i)^2}{(1+2i)^2} - \frac{(1-2i)^3}{(1+i)^3}$

$$\begin{aligned} \frac{(3+i)^2}{(1+2i)^2} - \frac{(1-2i)^3}{(1+i)^3} &= \frac{8+6i}{-3+4i} - \frac{(-3-4i)(1-2i)}{(2i)(1+i)} = \frac{8+6i}{-3+4i} - \frac{-11+2i}{-2+2i} = \\ &= \frac{-24+24+i(-18-32)}{9+16} - \frac{22+4+i(-4+22)}{4+4} = 2i - \frac{13+9i}{4} = \frac{-13-i}{4}. \end{aligned}$$

3. Wykonaj działania

a) $(1+i)^n$

Wyliczamy moduły i argumenty:

x	$ x $	$Arg x$
$1+i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
$(1+i)^n$	$2^{n/2}$	$\frac{n\pi}{4}$

Zatem wynik to:

- dla $n = 4k$, $2^{n/2}(1+i)$,
- dla $n = 4k+1$, $2^{n/2}(-1+i)$,
- dla $n = 4k+2$, $2^{n/2}(-1-i)$,
- dla $n = 4k+3$, $2^{n/2}(1-i)$.

b) $\frac{i^3(1-i)^{10}}{(1+i\sqrt{3})^7(\sqrt{3}-i)^8}$

x	$ x $	$Argx$
i	1	$\frac{\pi}{2}$
$1-i$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$1+i\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{3}$
$\sqrt{3}-i$	2	$-\frac{\pi}{6}$
i^3	1	$-\frac{\pi}{2}$
$(1-i)^{10}$	2^5	$-\frac{\pi}{2}$
$(1+i\sqrt{3})^7$	2^7	$\frac{\pi}{3}$
$(\sqrt{3}-i)^8$	2^8	$\frac{2\pi}{3}$
L	2^5	$-\pi$
M	2^{15}	π
wynik	2^{-10}	0

Wyliczamy moduły i argumenty:

A zatem wynik to po prostu $2^{-10}(\cos 0 + i \sin 0) = \frac{1}{1024}$.

4. Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyraż $\cos 3\alpha$ przy pomocy $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

$\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \sin \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha$, a zatem $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$.

5. Oblicz pierwiastki:

a) $\sqrt[4]{-1}$

Argument to π , a zatem mamy pierwiastki (pierwiastki są czwartego stopnia, więc ich argumenty różnią się o $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$):

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{-3\pi}{4} + i \sin \frac{-3\pi}{4} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

b) $\sqrt{-i}$

Argument to $\frac{-\pi}{2}$, a zatem mamy pierwiastki:

$$\begin{aligned}\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{-3\pi}{4} + i \sin \frac{-3\pi}{4} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

c) $\sqrt{+1+i\sqrt{3}}$

Argument to $\frac{\pi}{3}$, a zatem główny pierwiastek to:

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}.$$

6. Rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych równania:

a) $z^2 + 4z + 5 = 0$,

$$0 = z^2 + 4z + 4 + 1 = (z+2)^2 + 1,$$

zatem $z = -2 \pm i$.

b) $z^2 - (3+i)z + 8-i = 0$,

$\Delta = (3+i)^2 - 4(8-i) = 9+6i-1-32+4i = -24+10i = (1+5i)^2$, zatem $z = \frac{3+i \pm (1+5i)}{2}$, czyli dwa rozwiązania to $2+3i$ oraz $1-2i$.

c) $z^2 - \bar{z}^2 = 0$.

$0 = z^2 - \bar{z}^2 = (a+bi)^2 - (a-bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi - (a^2 - b^2 - 2abi) = 4abi$, zatem rozwiązaniem jest dowolna liczba zespolona z taka, że $\Re z = 0$ lub $\Im z = 0$.